様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　22 年　6 月　1 日現在

研究種目：　基盤研究（C）
研究期間：　2006～2009
課題番号：18540014
研究課題名（和文）　周期積分と導来圏・モジュライ空間の幾何学

研究課題名（英文）　Period integrals, derived categories, and geometries of Moduli spaces

研究代表者
細野　忍（ Hosono Shinobu ）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：60212198

研究成果の概要（和文）：　平面や空間の図形をさらに深めたものを多様体と呼んでいる．現代物理学では宇宙を多様体として理解し数学的に記述しているが，近年では特にカラビ・ヤウ多様体と呼ばれる多様体に理論物理学および数学の両視点から興味が持たれている．本研究では，カラビ・ヤウ多様体の幾何学的不変量の一つであるグロモフ・ウイッテン不変量について，特に具体的な計算処方を与える方程式の数学的構造の解明を行った．

研究成果の概要（英文）： Manifolds are mathematical objects which generalize curves in a plane, surfaces in a space, etc. In modern physics, manifolds are used as a mathematical model of the universe. Over the last two decades, Calabi-Yau manifolds have been attracting attentions of both physicists and mathematicians. In this research, a detailed mathematical study has been done on some geometric invariants, called Gromov-Witten invariants, of Calabi-Yau manifolds. In particular mathematical structures in a certain recursive equation for computing the invariants have been revealed.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	900,000	0	900,000
2007 年度	900,000	270,000	1,170,000
2008 年度	900.000	270,000	1,170,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,500,000	780,000	4,280,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：カラビ・ヤウ多様体，ミラー対称性，グロモフ・ウイッテン不変量

1．研究開始当初の背景

複素 3 次元カラビ・ヤウ多様体のグロモフ・ウイッテン不変量は，ミラー対称性によって，周期積分を用いて具体的な計算が可能であることが知られていた。しかし，高次種数のグロモフ・ウイッテン不変量の計算は困難を伴い，具体的に計算が可能な例は限られていた．計算における困難は，基礎方程式である正則アノマリー方程式の数学的構造に未解明な点が多く残されていることに起因している．

２．研究の目的

本研究では
(1) 不変量の具体的な計算処方を与える正則アノマリー方程式の数学的構造の解明
(2) 具体的な計算を通してミラー対称性の圏論的な定式化法およびＤブレインと呼ばれる対象のモジュライ空間の構造解明
以上を研究目的とした.

３．研究の方法

カラビ・ヤウ多様体の周期積分の具体的な計算を実行することによって，不変量の計算例を多数構成し，そこから数学的な構造を見出し系統化する実験的な手法に基づく.

４．研究成果

(1)種数が零に等しいグロモフ・ウイッテン不変量は，数学的にはホッジ構造の変形理論の枠組みで計算可能である．これに対し，高い種数を持ったグロモフ・ウィッテン不変量の計算処方は，正則な周期写像を扱うホッジ構造の変形理論の枠組みでは捉えることが出来ず，正則アノマリーとばれる現象を伴う．これは準楕円モジュラー形式に見られる現象に対比して理解できると期待されていたが，カラビ・ヤウ多様体の変形モジュライ空間のケーラー幾何学と，ホッジ構造の変形理論を統合することによって，準楕円モジュラー形式に良く似た構造を導入できることが明らかにされた．複素３次元カラビ・ヤウ多様体の場合，この構造は一般にとても複雑であるが，正則アノマリー方程式の数学的構造の基盤として今後の発展が期待されている.

(2) 正則アノマリー方程式の具体的な計算処方を整備して，連接層の導来圏は同値であるが双有理同値ではない２つのカラビ・ヤウ多様体のグロモフ・ウィッテン不変量の計算例を挙げることが出来た．この例は，ミラー対称性およグロモフ・ウイッテン不変量に関わる数学をさらに深める今後の研究に示唆を多く含み興味が持たれている.

(3) 周期積分のラプラス変換には，ランダウ・ギンツブルグ理論と呼ばれる物理的な解釈が知られている．数学的には，モノドロミー性質がストークス係数と呼ばれる漸近解の接続問題へ変換される．いくつかの超曲面型カラビ・ヤウ多様体の場合に，ストークス係数を決定し，それにミラー対称性の視点から幾何学的な解釈を与えた．計算可能な具体例が限られているが，今後改善しミラー対称性の幾何学を調べる方法として発展することを期待している.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 ４件)

1. S.Hosono, BCOV rings and holomorphic anomaly equation, Adv. Studies in Pure Math. Vol. 59 (印刷中), 2010 (査読　有)

2. S. Hosono, Y. Konishi, Higher genus Gromov-Witten invariants of the Grassmannian and the Pfaffian Calabi-Yau 3-folds, Adv. Theor. Math. Phys. Vol.13, 2009, pp463-495. (査読　有)

3. C. Doran, S. Hosono, On Stokes Matrices of Calabi-Yau Hypersurfaces, Adv. Theor. Math. Phys. Vol.11, 2007, pp147--174. (査読　有)

4. S. Hosono, Central Charges, symplectic forms, and hypergeometric series in local mirror symmetry, AMS/IP Studies in Adv. Math. Vol.38, 2006, pp405-436.(査読　有)

〔学会発表〕(計３件)

1. 細野　忍, 「BCOV ring and holomorphic anomaly equation」, BIRS Workshop “Number theory and physics at the crossroads”, 2008,9,21-26,BIRS(Canada), International Conference of Mathematics, 2009, 7, 5-10, NTU(Taiwan).

2. 細野　忍, 「BCOV ring, anomaly equation and applications to GW invariants」, Workshop on Gromov-Witten theory and related topics, 2008,7,9-13, KIAS(Korea).

3. 細野　忍, 「Fourier-Mukai partners and Gromov-Witten invariants」, “Workshop of Algrbraic Geometry and Physics 2007”, 2007,6,25-29, KIAS(Korea).

６．研究組織
(1)研究代表者
細野　忍 (Hosono Shinobu)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：60212198

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：