

平成 21 年 6 月 12 日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：平成 18 年度～平成 20 年度

課題番号：18540015

研究課題名(和文)p 進 Hodge 理論の基礎理論とその応用の研究

研究課題名(英文) Research on foundations of p-adic Hodge theory and their application

研究代表者

辻 雄 (TSUJI TAKESHI)

所属機関・所属部局名・職名 東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号 40252530

研究成果の概要：

p 進エタール局所系に対する基礎概念 Hodge-Tate, de Rham, crystalline が, 特殊ファイバーの生成点での様子だけで決定されることを明らかにした. また p 進体上の半安定還元をもつ代数多様体のべき単基本群の p 進 Hodge 理論に対し, p 進エタール局所系の p 進 Hodge 理論の観点からの解釈を与えた. その他, 数論的 D 加群を用いた新しい視点からの log crystalline cohomology の研究, 虚数乗法をもつ楕円曲線の p 進楕円ポリログ層の構造の完全な決定を行った.

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
18 年度	1,300,000	0	1,300,000
19 年度	900,000	270,000	1,170,000
20 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	540,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：p 進 Hodge 理論, D 加群, ポリログ層

1. 研究開始当初の背景

(1) p 進ガロア表現に対する基礎概念 Hodge-Tate, de Rham, crystalline, semi-stable の p 進エタール局所系への一般化が定義されていたが, どのような局所系がこの性質を持ちうるのか, 一次元の局所系以外には良く分かっていなかった.

(2) 良い安定還元を持つ代数多様体に対しては, 志甫淳によるべき単基本群の p 進 Hodge 理論の, crystalline p 進エタール局所系の観点からの解釈が, また crystalline p 進エタール局所系の半安定還元をもつ代数多様

体への一般化が, 研究代表者の研究によって明らかになっていた.

(3) 虚数乗法を持つ楕円曲線上の楕円ポリログ層の p 進実現の構造を明らかにすることは, L 関数, p 進 L 関数の特殊値の研究において重要である. Ordinary な素数 p で一変数の p 進 L 関数と関連する部分については, 坂内健一の結果が知られていた.

(4) p 進表現の理論の p 進表現の族への一般化について, Hodge-Tate 表現と関連が深い Sen の理論の一般化が知られていた. 幾何的表現と関連が深い de Rham 表現に対して, 類

似の理論ができれば、応用上有用と期待される。

2. 研究の目的

(1) 良い還元を持つ代数多様体上では、de Rham p 進局所系が crystalline になるための条件が、特殊ファイバーの生成点のみで決定される可能性がある状況証拠が得られていた。de Rham, crystalline という概念が特殊ファイバーの生成点のみで決定されるかを明らかにする。

(2) 良い還元の場合の結果を一般化し、半安定還元をもつ代数多様体に対しても、志甫淳によるべき単基本群の p 進 Hodge 理論への、semi-stable p 進エタール局所系の観点からの解釈を与える。また応用上重要な接基点も扱える理論を構築する。

(3) 虚数乗法の楕円曲線の楕円ポリログ層の convergent F -isocrystal の圏での実現を、2変数も扱える形で完全に決定し、Bloch 加藤予想へ応用する。

(4) p 進表現の族へ、de Rham 表現と関連が深い Fontaine の理論を一般化する。

3. 研究の方法

(1) de Rham 局所系が、crystalline 局所系になるための条件の特殊ファイバーの生成点での決定については、de Rham 局所系の p 進周期のある種の収束性の問題に帰着させることにより研究した。また de Rham 局所系と Hodge-Tate 局所系については、 p 進ガロア表現に対する Fontaine の理論、Sen の理論の局所系への一般化、及び森田知真の剰余体が完全でない完備離散付値体の Hodge-Tate 表現、de Rham 表現の研究の手法を用いた。

(2) 良い還元を持つ場合、crystalline 層から filtered convergent F -isocrystal の圏への充満忠実関手の存在とその syntomic cohomology 解釈が重要であった。前者の半安定還元への一般化は、2005 年度までの研究代表者の研究によって得られていた。後者の適切な一般化を与えることが鍵となった。

(3) 虚数乗法の楕円曲線の楕円ポリログ層の Hodge 実現は Beilinson-Levin により決定されている。しかし、その表示には実解析的関数が用いられているため、その単純な p 進化は困難である。坂内健一による一変数の部分的結果以後長らく未解決であった。坂内健一の第 2 種微分形式を用いるアイデアにより、de Rham 実現の代数的な記述を与えることが研究進展のきっかけとなった（坂内健一、小林真一との共同研究。）

(4) log crystalline cohomology の D 加群の研究について、semi-stable scheme の数論的 D 加群の圏での nearby cycles を大域的に定義する困難を、log scheme 上の D 加群の理論を用いて克服した。

4. 研究成果

(1) p 進エタール局所系の p 進 Hodge 理論における purity の研究。

p 進体の絶対ガロア群の p 進表現に対する Hodge-Tate, de Rham, crystalline, semi-stable といった概念は、 p 進体上の非特異な代数多様体上の p 進エタール局所系に拡張されている。代数多様体が良い退化を持つ場合、Hodge-Tate, de Rham, crystalline という 3 概念について、次のような purity が成り立つことを示した。 p 進エタール局所系が Hodge-Tate (de Rham, crystalline) になるためには、特異ファイバーの生成点で完備局所化してえられる完備離散付値体への引き戻しが Hodge-Tate (de Rham, crystalline) であることを示した。系として、良い退化をもつ代数多様体上の代数多様体の族（特異点も許す）について、その相対 p 進エタールコホモロジーが p 進局所系をなすならば、必ず de Rham 表現になることが従う。

(2) semi-stable p 進エタール局所系を用いたべき単基本群の研究。

p 進体上の半安定な還元をもつ代数多様体上の semi-stable 局所系の理論を用いた、べき単基本群の p 進 Hodge 理論の研究を接基点の場合も含めて完成させた。良い還元をもつ場合の crystalline 局所系を用いた今までの研究の一般化である。特に志甫淳の比較定理の別証明を与えると同時に、べき単な Hodge 構造の variation に関する Hain-Zucker の定理の p 進 Hodge 理論における類似を、semi-stable reduction の場合にも証明した。接基点のみならず、無限遠因子での normal bundle の切断についての関手性も示した。それに関連する semi-stable 局所系の基礎理論も構築した。

(3) CM 楕円曲線の楕円ポリログ層の p 進実現の研究。

坂内健一、小林真一の共同研究により、類数 1 をもつ虚 2 次体に虚数乗法をもつ楕円曲線上の楕円ポリログ層の filtered convergent F -isocrystal の圏での実現の構造を、supersingular な素数 p の場合も含めて、完全に決定した。その系として、この実現の等分点での特殊化が、 p 進 L 関数の特殊値を与えることを示した。 p 進 L 関数の特殊値についての Perrin-Riou 予想の、CM 楕円曲線の場合への応用が期待される。

(4) D 加群の観点からの log crystalline cohomology の研究。

log crystalline cohomology を与えると期待される vanishing cycles を D 加群の圏で構成した。また、その monodromy filtration および graded quotients の構造を調べ、重さスペクトル系列を構成した。後に、この

vanishing cycles のコホモロジーが log crystalline cohomology と自然な同型をもつことが, P. Berthelot により証明されたが, monodromy との compatibility はまだ分かっていない. ここで構成した重さスペクトル系列の, 順像に関する関手性, 双対性の研究に不可欠である, log scheme 上の D 加群についての adjunction formula, 相対コホモロジーの双対性などの基本定理も証明した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計0件)

[学会発表](計8件)

辻雄, On semi-stable smooth p-adic sheaves, International conference: Hodge theory, 2006年6月24日, San Servolo, Venice, Italy

辻雄, On semi-stable smooth p-adic étale sheaves, Workshop: Arithmetic Algebraic Geometry, 2006年9月12日, 京都大学数理解析研究所

辻雄, On log crystalline cohomology and arithmetic D-modules, Workshop: p-adic Arithmetic Geometry, 2006年11月22日, 京都大学数理解析研究所

辻雄, On purity for p-adic representations, p-adic method and its applications in arithmetic geometry 2007, 2007年6月11日, 東京大学

辻雄, On purity for p-adic representations, Of ramification and Vanishing Cycles, 2007年9月11日, 東京大学

辻雄, On purity for p-adic representations, Workshop: Arithmetic Applications of p-adic Analysis and Rigid Spaces, 2008年2月22日, Universität Regensburg,

辻雄, Nearby cycles and D-modules of log schemes in characteristic $p > 0$, Recent Progress in Arithmetic D-modules theory, 2008年10月3日, IRMA, Université de Strasbourg.

辻雄, Nearby cycles and D-modules of log schemes in characteristic $p > 0$, P-adic method and its applications in arithmetic geometry at Sendai, 2008年11月7日, 東北大学

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

[その他]

6. 研究組織

(1) 研究代表者

辻雄 東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者