

平成22年5月30日現在

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2006～2009
 課題番号：18540027
 研究課題名（和文）代数曲線の被覆の数論幾何 -- ガロア表現・フルビッツ空間・正標数

研究課題名（英文）Arithmetic geometry of covers of algebraic curves -- Galois representations, Hurwitz spaces, and positive characteristic

研究代表者

玉川 安騎男（TAMAGAWA AKIO）
 京都大学・数理解析研究所・教授
 研究者番号：00243105

研究成果の概要（和文）：本研究の主目的は、3名の海外共同研究者（C. Rasmussen（米）、A. Cadoret（仏）、M. Saidi（英））との、代数曲線の被覆の数論幾何に関する3つの共同研究（「ガロア表現」、「フルビッツ空間」、「正標数」）の進展だった。実際、3氏の訪日、玉川の渡仏・渡英などを通じて共同研究を進め、伊原の問題に関連するアーベル多様体のある有限性予想、フルビッツ空間の有理点に関するモジュラータワー予想、ガロア表現像の普遍下界性問題、正標数及びp進の遠アーベル幾何、などについて、大きな成果を上げた。

研究成果の概要（英文）：The original main aim of the present research project was to develop my three joint researches（`Galois representations`, `Hurwitz spaces`, `positive characteristic`）on arithmetic geometry of covers of algebraic curves with three respective foreign collaborators -- C. Rasmussen (USA), A. Cadoret (France) and M. Saidi (UK). Actually, through their visits to Japan and my visits to France and UK, we have developed our joint researches and obtained several nice results concerning a finiteness conjecture for abelian varieties related to Ihara's problem; the modular tower conjecture on rational points of Hurwitz spaces; a uniform boundedness problem for Galois representations; positive-characteristic and p-adic anabelian geometry and so on.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,500,000	720,000	4,220,000

研究分野：整数論、数論幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数曲線、被覆、基本群、ガロア表現、フルビッツ空間、正標数

1. 研究開始当初の背景
 数論的な体の上に定義された代数多様体の

被覆や基本群の数論幾何学的研究は、近年、内外の多くの研究者によってさまざまな指

針や視点に基づいて盛んに行われている。特に、代数曲線の場合は最も深く研究されている場合であり、過去10年間研究代表者の研究の中心的対象であり続けてきた。

研究代表者は、2005年度中に、この分野の外国人若手研究者3名の訪問を受けた：Christopher Rasmussen（米ライス大、現在は米ウェスレヤン大）、Anna Cadoret（仏リール第1大、現在は仏ボルドー第1大）、Mohamed Saidi（英エクセター大）。いずれも先方からの希望で訪問が実現したのだったが、幸運にも、3名それぞれとの共同研究がスタートし、一定の研究成果が2005年度中に既に出始めていた。より具体的には：

(1) Rasmussen氏との共同研究

代数曲線 X の副1幾何的基本群（ 1 は素数）の上の外ガロア表現は、代数曲線の被覆の数論幾何の中心的対象であり、特に $X = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の場合は、虚数乗法論・岩澤理論・モチーフ論・ポリログ・多重ゼータ値などとも関係し、数論的にも重要な対象である。今 $X = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の場合の核に対応する（無限次）代数体を Ω_1 、 1 次元分体の外で不分岐な副1拡大で最大のものを Λ_1 と記す時、 $\Omega_1 \subset \Lambda_1$ が成立するが、いわゆる伊原の問題は、等式 $\Omega_1 = \Lambda_1$ の成立を問うものであり、この分野の基本的な未解決問題の一つである。Rasmussen は、それまで、伊原の問題へのアプローチとして、代数体 $K \subset \Omega_1$ 上定義されたアーベル多様体 A に付随する 1 進表現の核に対応する体を K_A^1 と記す時、(i) $K_A^1 \subset \Lambda_1$ となるような A を（たくさん、あるいは全て）求めよ、(ii) そのような A に対し、 $K_A^1 \subset \Omega_1$ となるかどうか調べよ、という問題を考えることを提唱し、関連するさまざまな結果を得ていた。

2005年度にRasmussenが京大数理研に滞在した際、この問題に関連する議論を重ねる中で共同研究が進み、例えば次のような成果を得た：(i) 素数 1 と \mathbb{Q} 上の楕円曲線 E （の同型類）の組 $(1, E)$ で、 $\mathbb{Q}_E^1 \subset \Lambda_1$ を満たすものは有限個であることの証明、(ii) そのような有限個の $(1, E)$ の完全な決定、(iii) そのような $(1, E)$ の内の多くのものについて、 $\mathbb{Q}_E^1 \subset \Omega_1$ の証明。

(2) Cadoret氏との共同研究

有限群 G と非負整数 r に対し、固定した射影直線上の（分岐）ガロア被覆で、ガロア群が G 、分岐点の個数が r であるもののモジュライ空間 $H_r(G)$ をフルビッツ空間と呼ぶ。また、射影直線を固定しない場合のモジュライ空間 $H_r(G)^{\text{rd}}$ を被約フルビッツ空間と呼ぶ。これらは、射影直線上のガロア被覆の研究に

おける最も基本的な対象である。例えば、与えられた有限群 G に対する正則逆ガロア問題は、（適当な r に対する） $H_r(G)$ の有理点の存在を問うことと同値になる。Cadoret は、 $H_r(G)^{\text{rd}}$ の各点に対し、base invariant という対応する被覆の対称性の高さを測る不変量を、 PGL_2 の有限部分群の共役類として導入し、自然な射 $H_r(G) \rightarrow H_r(G)^{\text{rd}}$ における有理点の持ち上げ問題（ $H_r(G)^{\text{rd}}$ の有理点に対し何次の拡大体にならば $H_r(G)$ の有理点に持ち上がるかという問題）への応用を与えた。その上で、彼女は、有限群 $E \subset \text{PGL}_2$ に対し、base invariant（のある代表元）が E を含むような点全体が $H_r(G)^{\text{rd}}$ の閉集合となることを期待し、これを base 予想と呼んだ。

2005年度にCadoretが京大数理研に滞在した際、この問題に関連する議論を重ねる中で共同研究が進み、base 予想の証明を与えることができた。その際の証明は、被約フルビッツ空間における幾何的考察に基礎をおくもの（主に玉川が考案）と PGL_2 における群論的考察に基礎をおくもの（主にCadoretが考案）が独立に2種類あり、それぞれの証明ではカバーできない例外的な場合があるが、両方を合わせれば全ての場合をカバーできる、という状況であった。

(3) Saidi氏との共同研究

標数 0 の代数閉体上の代数曲線の基本群は、種数 g と無限遠点の数 r のみによって決まる。一方、標数 $p > 0$ の代数閉体上の代数曲線の基本群は、一般には (g, r) によっては決まらず、元の曲線のモジュライに大きく依存する。例えば、 \mathbb{F}_p の代数閉包の上では、（双曲的）代数曲線の同型類は、その基本群の同型類によって有限個を除いて決定されてしまうことが、Pop-Saidi, Raynaudの部分的結果をふまえて、最終的には研究代表者によって完全に証明されている。この結果を一般の正標数代数閉体 k 上の場合に適当な形で拡張することは、この分野の基本的な未解決難問題となっている。Saidi は、この問題へのアプローチとして、次の結果を得ていた： C を k 上の非特異代数曲線（ η はその生成点）、 X を C 上の双曲的代数曲線の smooth な族とする。次の (i)(ii) を仮定する：(i) X/C は non-isotrivial、(ii) C は完備。この時、 C のある閉点 s が存在して、 η 上の幾何的ファイバーから s 上の幾何的ファイバーへの基本群の特殊化写像は同型でない。ここで、この結果の望ましい一般化は条件 (ii) を外すことであり、この周辺の研究者（Pop, Saidi, 研究代表者ら）の間で数年前から懸案になってきた。

2005年度に Saidi が京大数理研に滞在し、この問題に関連する議論を重ねる中で共同研究が進み、上記の一般化に関する進展があり、例えば次のような結果が得られた。 X/C が smooth な族 X^{\wedge}/C^{\wedge} にコンパクト化できると仮定する。 X^{\wedge}/C^{\wedge} の (相対) ヤコビ多様体を J^{\wedge}/C^{\wedge} とし、 $\Theta^{\wedge} \subset J^{\wedge}$ を、 X^{\wedge}/C^{\wedge} の Raynaud の意味での (相対) テータ因子とする。 $J^{\wedge}[1]^*$ で、 $J^{\wedge}[1]$ から $\Theta^{\wedge} \cap J^{\wedge}[1]$ の位相閉包 (いくつかの連結成分の合併となる) を除いたものとする。更に、ある $N > 0$ が存在して、無限個の素数 l に対して、交叉 $\Theta^{\wedge} \cap J^{\wedge}[1]^*$ の各点における多重度が N 以下になることを仮定する。この時、 C のある閉点 s が存在して、上記の特殊化写像は同型でない。

また、上記の問題は、広い意味で正標数の遠アーベル幾何の問題ととらえられるが、2005年度中の Saidi との共同研究では、関連して、有限体上の曲線及びその関数体の遠アーベル幾何に関し、幾何的基本群を標数と素な商に置き換えた場合の Isom 版及びある種の局所条件を仮定した上での Hom 版を証明することができた。

2. 研究の目的

研究課題名中の「ガロア表現・フルビッツ空間・正標数」は、上述の3つの共同研究をそれぞれ標語的に表したものである。本研究課題の基本的な構想は、これら3つの共同研究を進展させつつ、同時に、研究代表者自身のこれまでの研究の継続発展も絡ませて研究成果を挙げていこうというものであった。より具体的な研究目的としては：

(1) Rasmussen 氏との共同研究

本研究課題の第1の目的は、2005年度中に Rasmussen との共同研究によって得られた上記の結果を改良・一般化することであった。具体的には、第一に、上記の (iii) において残りの (l, E) に対して考察すること。第二に、上記 (i) (ii) (iii) において Q 上の楕円曲線を代数体上のアーベル多様体に一般化して同様の結果を得ることである。

(2) Cadoret 氏との共同研究

本研究課題の第2の目的は、2005年度中に Cadoret との共同研究によって得られた上記の結果を改良と及び応用をすることであった。具体的には、まず、改良に関しては、上記のような2つの証明を技術的に改良することにより、どちらの手法を取っても全ての場合をカバーできるようにすることが一点、2つの証明の関係性を解明し、この閉部分集合をより深く解明することがもう一点であった。また、応用に関しては、上記の有理点の持ち上げ問題について、この結果を用いた

幾何的な考察を進め、正則逆ガロア問題に光を当てることである。

(3) Saidi 氏との共同研究

本研究課題の第3の目的は、2005年度中に Saidi との共同研究によって得られた上記の結果を改良して、完全な一般化に到達することであった。また、関連する予想についても、アプローチを目指していた。

3. 研究の方法

本研究課題の研究方法について、まず、純に学問的な観点から説明する。研究課題名に従い、便宜上、3つの標語に分けて説明する。

(1) ガロア表現

Rasmussen との上述の共同研究で得た Q 上の楕円曲線に関する成果は、次のような方法で得られた。まず、条件 $Q_E^1 \subset \Lambda_1$ を満たすような Q 上の楕円曲線 E に付随する1進ガロア表現の満たすべき群論的性質を考察することにより、 E は有理的な1巡回部分群を持ち、従ってモジュラ曲線 $X_0(1)$ の Q 有理点を定めることがわかる。ところが、このような有理点は (Mazur によって) 既に分類されているため、その結果を用いて調べていくことにより、求める結果を得るのである。この結果の一般の代数体上の楕円曲線への拡張を目指す際にも、モジュラ曲線の数論幾何において、Mazur 以降 Kamienny、百瀬、Merel らによって盛んになされてきたモジュラ曲線の有理点に関する研究における知見を有効に活用していくとともに、一般次元のアーベル多様体への拡張を考える際には、このようなモジュラ多様体の有理点の研究における知見はまだまだ乏しいため、まずは、上述の1進ガロア表現に関する群論的考察の部分を一般化することを目指した。

(2) フルビッツ空間

Cadoret との上述の共同研究で得た base 予想の証明という成果では、幾何学的手法と群論的手法という二つの全く異なる手法で (多くの場合に) 同じ帰結が得られた。当初は、この2つの手法を改良していくことにより、どちらの手法でも完全な証明が与えられることを目指す計画であった。実際の研究期間中は、フルビッツ空間の有理点の問題に関するモジュラータワー予想に端を発し、ガロア表現の解析という手法により、後述の成果を得た。

(3) 正標数

Saidi との上述の共同研究で得た、正標数の双曲的代数曲線族の基本群の特殊化写像に関する結果は、まだまだ中途半端であるが、(相対) ヤコビ多様体の全空間における交叉

理論を用いるという点で、従来のこの分野にはなかった独創性があり、完全解決へのブレークスルーとなることが期待できるため、この方向を推し進めていく計画であった。実際の研究期間中には、Saidi との上述の共同研究で得た、有限体上の曲線またはその関数体の遠アーベル幾何に関する結果における手法を基礎にして、後述の成果を得た。

本研究課題に研究分担者・連携研究者はいないため、役割分担としては、研究代表者が全て一人で研究を行うという方法になる。他方、本研究課題は、上述の通り、3名の海外共同研究者との3つの共同研究を重要な要素として含むため、その実施方法について説明する。海外共同研究者と研究代表者が離れている間は、主として電子メールによる研究打ち合わせが研究遂行の手段である。この間は、既に得られた結果を整理したり論文にまとめたりすることに主に当てる。電子メールはファイルのやりとりなどには便利であるが、数学の議論に関しては、直接会ってするのに効率ははるかに及ばないため、やはり、研究協力者あるいは研究代表者のどちらかが出向いて直接の議論をすることが、研究計画遂行のための手法として不可欠であった。実際、Rasmussen の 2006～2008 の各年度の招へい、Cadoret、Saidi の 2006～2009 の各年度の招へい、また、研究代表者の 2007 年度の訪韓、2008 年度の渡仏、2009 年度の渡英、渡仏を、(一部本補助金の使用により) 実現し、後述の通り、本研究課題に関する十分な成果を上げることができた。

また、2006 年度には、研究代表者が所属する京大数理研でプロジェクト研究「数論的代数幾何学の研究」が実施され、研究代表者もその組織委員の 1 人であった。このプロジェクトとの協調も、研究計画遂行の手法の一つとして重要であったが、実際、後述の通り、これにより一定の成果を上げることができた。

4. 研究成果

(1) Rasmussen 氏との共同研究

2006～2008 の 3 年度において、海外共同研究者の Rasmussen 氏の招へいを実現し、また、2007 年度の韓国ソウル KIAS、2009 年度の英国ケンブリッジ INI において、ともに研究集会に参加する機会を得た。(このうち、2008 年度 2 回目の Rasmussen 氏の来日と 2007 年度の玉川の訪韓は、本補助金の使用により実現した。) これらの機会に本研究課題に関する研究討論・研究打合せを進めることにより、以下の成果を得た：

①2005 年度中に、射影直線引く 3 点の副 1 基本群の上の Galois 表現に関する伊原の問題

に関連して、代数体 K 上の g 次元アーベル多様体 A の同型類と素数 l の組で、 A の全ての l 冪等分点を添加して得られる K の拡大体が、 K 上 l の外で不分岐となり、更に K に 1 の原始 l 乗根を添加して得られる体上副 1 となるようなものは有限個しかないと予想し、 K が有理数体 \mathbb{Q} で $g=1$ の場合にはこの予想を証明し、更に、そのような有理数体上の楕円曲線の同型類と素数の組のリストを完全に決定していたが、研究期間中に、この成果及び関連する成果を論文にまとめ、発表した(雑誌論文⑤)。

②上記の予想について、次の場合に証明した(いずれも論文準備中)：(i)いたるところ半安定還元を持つアーベル多様体に限る場合；(ii) $K=\mathbb{Q}$ で g が 3 以下の場合；(iii) $g=1$ で $[K:\mathbb{Q}]$ が 3 以下の場合；(iv) $g=1$ で K/\mathbb{Q} のガロア閉包のガロア群の冪数が 3 の場合；(v) 一般リーマン予想の仮定下での一般の g の場合。このうち(i)は、その後小関祥康氏によりある種の条件を満たすガロア表現の場合に一般化された。

(2) Cadoret 氏との共同研究

2006～2009 の全年度において、海外共同研究者の Cadoret 氏の招へいを実現し、また、2007 年度の韓国ソウル KIAS、2009 年度の英国ケンブリッジ INI、仏国ボルドー IMB において、ともに研究集会に参加する機会を得た。(このうち、2007 年度の玉川の訪韓は、本補助金の使用により実現した。) これらの機会に本研究課題に関する研究討論・研究打合せを進めることにより、以下の成果を得た：

①2005 年度中に、Hurwitz 空間(射影直線の分岐 Galois 被覆のモジュライ空間)内の「base locus」が閉集合であることを証明していたが、研究期間中に、この成果及び関連する成果を論文にまとめ、発表した(雑誌論文④)。

②有理数体上有限生成な体上の曲線の上のアーベルスキームに対し、そのファイバーに現れるアーベル多様体の有理的な p 冪ねじれ点の位数に対する上界の存在を証明、系として Fried のモジュラータワー予想の 1 次元の場合を証明した(論文を雑誌投稿中)。また、これらの結果の正標数版を証明した(雑誌論文②)。

③有理数体上有限生成な体上の曲線の数論的基本群の(ある弱い条件を満たす) 1 進ガロア表現が与えられた時、その表現を曲線の(剰余次数を制限した)閉点の分解群に制限して得られるガロア表現の像に対する下界の存在を証明した(論文 2 編雑誌投稿中)。

④標数 0 の曲線の上のアーベルスキームに対し、素数 1 を走らせる時の幾何的基本群の法 1 表現の像のふるまいについて考察し、(ある技術的仮定の下で) 望まれる結果を証明できた(論文 1 編投稿中)。

(3) Saidi 氏との共同研究

2006~2009 の全年度において、海外共同研究者の Saidi 氏の招へいを実現し、また、2009 年度の英国ケンブリッジ INI において、ともに研究集会に参加する機会を得た。(このうち、2007 年度と 2009 年度の Saidi の来日は、本補助金の使用により実現した。) これらの機会に本研究課題に関する研究討論・研究打合せを進めることにより、以下の成果を得た:

①2005 年度中に、有限体上の曲線及びその関数体の遠アーベル幾何に関し、幾何的基本群を標数と素な商に置き換えた場合の Isom 版を証明していたが、研究期間中に、この成果及び関連する成果を論文にまとめ、発表した(雑誌論文③)。その後、関数体の場合には、この結果の類体論を使った別証明を与えた(雑誌論文①)。

②2005 年度中に、有限体上の曲線の関数体の遠アーベル幾何に関し、ある種の局所条件を仮定した上での Hom 版を証明していたが、研究期間中に、この成果及び関連する成果を論文 1 編にまとめた(雑誌投稿中)。

③有限体上の曲線やその関数体の遠アーベル幾何に関して、素数の無限集合 Σ である条件を満たすものに対し、幾何的基本群を最大副 Σ 商に置き換えた場合の Isom 版を証明した(論文 2 編準備中)。

④ p 進体上の曲線の遠アーベル幾何におけるセクション予想に関する結果を得た(論文 1 編準備中)。

(4) その他

玉川が組織委員を務めた 2006 年度数理解析研究所プロジェクト研究「数論的代数幾何学の研究」と協調して本研究計画を遂行し、関連して以下の成果を得た。(なお、当該プロジェクトでは、本補助金を用いて、代数曲線の被覆の数論幾何の研究者である T. Szamuely 氏、J. Stix 氏の招へいも実現し、研究課題に関連する研究討論・研究打合せを行った。)

①M. Kim 氏との共同研究により、副冪単基本群を用いて曲線の有理点を統制する Kim 氏の理論を発展させ、有理数体上の

Mordell-Weil 階数 1 の楕円曲線から原点を除いて得られるアフィン曲線に対し、Siegel の定理の別証を得た(雑誌論文⑦)。

②望月新一氏との共同研究により、代数曲線の配置空間の(副有限、副 1 または離散的)基本群に対し、より低い次元の配置空間への自然な射影から定まる「ファイバー部分群」たちが、群論的に特徴付けられることを証明した(雑誌論文⑥)。なお、この結果には、望月氏による曲線の配置空間の絶対 p 進遠アーベル幾何への応用がある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① Mohamed Saidi and Akio Tamagawa, On the anabelian geometry of hyperbolic curves over finite fields, RIMS Kokyuroku Bessatsu B12 (2009), 67-89, 査読有.
- ② Anna Cadoret and Akio Tamagawa, Torsion of abelian schemes and rational points on moduli spaces, RIMS Kokyuroku Bessatsu B12 (2009), 7-29, 査読有.
- ③ Mohamed Saidi and Akio Tamagawa, A prime-to- p version of Grothendieck's anabelian conjecture for hyperbolic curves over finite fields of characteristic $p > 0$, Publ. RIMS 45 (2009), no. 1, 135-186, 査読有.
- ④ Anna Cadoret and Akio Tamagawa, Stratification of Hurwitz spaces by closed modular subvarieties, Pure and Applied Mathematics Quarterly 5 (2009), no. 1, 227-253, 査読有.
- ⑤ Christopher Rasmussen and Akio Tamagawa, A finiteness conjecture on abelian varieties with constrained prime power torsion, Mathematical Research Letters 15 (2008), no. 6, 1223-1231, 査読有.
- ⑥ Shinichi Mochizuki and Akio Tamagawa, The algebraic and anabelian geometry of configuration spaces, Hokkaido Mathematical Journal 37 (2008), no. 1, 75-131, 査読有.
- ⑦ Minhyong Kim and Akio Tamagawa, The 1-component of the unipotent Albanese map, Mathematische Annalen 340 (2008), no. 1, 223-235, 査読有.

〔学会発表〕(計5件)

- ① Anna Cadoret and Akio Tamagawa, A uniform open image theorem for l -adic representations of étale fundamental groups, Sakura Workshop “Torsion of abelian schemes and rational points on moduli spaces”, IMB, Bordeaux (フランス), 2010年1月25日--28日(全4回).
- ② Akio Tamagawa, Torsion of abelian schemes and rational points on moduli spaces (joint work with Anna Cadoret), “Anabelian Geometry”, INI, Cambridge (イギリス), 2009年8月27日.
- ③ 玉川安騎男, Torsion of abelian schemes and rational points on moduli spaces (Anna Cadoret 氏との共同研究), RIMS 研究集会「代数的整数論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所, 2007年12月10日.
- ④ Akio Tamagawa, Recent progress in anabelian geometry, “Asian Conference on Arithmetic Geometry”, KIAS, Seoul (韓国), 2007年9月15日--18日(全4回).
- ⑤ Akio Tamagawa, The algebraic and anabelian geometry of configuration spaces (joint work with Shinichi Mochizuki), RIMS 研究集会「Arithmetic Galois Theory and Related Moduli Spaces」, 京都大学数理解析研究所, 2006年10月27日.

〔その他〕

ホームページ

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ja/list/tamagawa.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

玉川 安騎男 (TAMAGAWA AKIO)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：00243105