

平成22年 4月28日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2009

課題番号：18540028

研究課題名 (和文) 局所ラングランズ予想と跡公式の研究

研究課題名 (英文) Study of the local Langlands conjecture and the trace formula

研究代表者 平賀 郁

(HIRAGA KAORU)

京都大学・大学院理学研究科・講師

研究者番号：10260605

研究成果の概要 (和文)：

整数論においてとても重要な理論である類体論の一般化のひとつがラングランズ予想である。その一部が局所ラングランズ予想と呼ばれるもので、基本的な $GL(n)$ の場合が Harris と Taylor と Henniart によって証明されている。

本研究ではこの予想を $SL(n)$ の内部形式の場合に、より精密化された形で証明した。

また予想を新たな方向に発展させて、これまで良く分かっていなかった不変量の間の関係について、いくつかの場合に結果を得た。

研究成果の概要 (英文)：

The Langlands conjecture is a generalization of the class field theory, which is a very important theory in number theory.

Part of it is the local Langlands conjecture, whose $GL(n)$ case had been proved by Harris, Taylor and Henniart.

In this study, we proved the local Langlands conjecture for the inner forms of $SL(n)$ in a precise formulation.

Moreover we developed the conjecture to a new direction and obtained results on relations of invariants, that was not cleared.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,500,000	720,000	4,220,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：局所ラングランズ予想 エンドスコピー

1. 研究開始当初の背景

 $GL(n)$ の局所ラングランズ予想が Harris

と Taylor と Henniart により証明された後、次の目標として他の古典群の局所ラング

ランズ予想があった。
GL(n) 以外の古典群においては、局所ラング
ランズ予想は 1 対 1 の対応にならない為、
L-packet や A-packet を考察し、エンドス
コピーを扱う必要のあることが知られてい
た。

このような事情に応じて、一般の簡約代数群
に対する局所ラングランズ予想が Arthur
や Vogan により精密化されていった。
本研究の開始当初、この分野における重要な
結果はいくつか得られていたが、Arthur や
Vogan により精密化された形の局所ラング
ランズ予想の証明はいくつかの古典群の場
合にしか得られていなかった。

一方で、研究代表者は斎藤裕氏とのそれまで
の共同研究の中で、SL(n) とその内部形式の
tempered な表現について、精密化された形
の局所ラングランズ予想の証明を得ていた
が、non-tempered な表現の場合については
tempered な表現の場合と異なる技術が必要
となって証明ができていなかった。

よって、本研究開始当初には、non-tempered
な表現の場合について研究を行っていく必
要があり、また、他の古典群について研究を
行い A-packet やエンドスコピーと関わる
調和解析について理解を深める必要があっ
た。

2. 研究の目的

本研究課題の申請時における当初の研究目
的は基本的に本研究以前の斎藤裕氏との共
同研究を発展させていくことであり、具体的
には以下のものであった。

(1) Arthur と Vogan により精密化され
た形の局所ラングランズ予想を $U(n)$, $SU(n)$
といった古典群に対して研究し、特に S-群
とパケットの構造について研究を行って
いく。また、併せて、このような場合のエ
ンドスコピーと関わる調和解析について研
究する。

(2) 以前の研究において証明できていなか
った、SL(n) の内部形式の non-tempered
な表現に対する Arthur と Vogan により
精密化された形の局所ラングランズ予想を
研究する。

3. 研究の方法

(1) Arthur と Vogan により精密化され
た形の局所ラングランズ予想の研究は $U(n)$ と
 $SU(n)$ の間の tempered な表現に対する
L-packet の構造と S-群の違いを斎藤裕氏
との共同研究を継続しながら研究した。
既に証明を得ていた SL(n) の内部形式の場
合には GL(n) の内部形式の L-packet が単
純な構造をしていることを使って議論が行
われていたので、SL(n) の内部形式の場合に
使った群の制限に関する理論を一般化して

いき、 $SU(n)$ 場合にも適用できるように一般
の簡約代数群の場合に拡張していった。

(2) SL(n) の内部形式の non-tempered な表
現に対する精密化された局所ラングランズ
予想の研究に関しては、Badulescu による
GL(n) の内部形式の研究で使われた議論を
拡張し、ゼレビンスキー対合の理論を使っ
て non-tempered な表現に対する精密化され
た局所ラングランズ予想を既に証明してあ
った tempered な表現に対する精密化され
た局所ラングランズ予想に帰着した。

(3) 本研究の最中に、局所ラングランズ予
想に関係した調和解析の研究に新たな展開
の方向が見つかった。それは、ガロア群の表
現の不変量と簡約代数群の離散系列表現の
不変量との間の関係である。

これは非常に重要な研究テーマでエンドス
コピーに関係した調和解析でもあるため、こ
の方向にも研究を進め、市野篤史氏 (大阪
市大)・池田保氏 (京都大) と共同で GL(n) の
振じれたエンドスコピーの理論を使って
 $U(n)$ の離散系列表現を研究していった。

(4) ガロア群の表現の不変量と簡約代数群
の離散系列表現の不変量との間の関係の一
般化という観点から Kottwitz--Shelstad
の予想に対しても SL(n) の場合に行った研
究を精密化しながら市野篤史氏 (大阪市大)
と共同で研究を行っていった。

4. 研究成果

(1) SL(n) の内部形式の場合の精密化され
た局所ラングランズ予想に関する結果を
 $SU(n)$ に拡張するためには、 $U(n)$ の
A-packet で 2 つ以上の表現を含むものを
考察する必要がある。このような A-packet
の $SU(n)$ への制限は既約表現の制限を個別
に考察するだけではなく、S-群によるパラ
メータ付け込みで表現の制限を考察して
いく必要がある。

本研究においては、斎藤裕氏 (京都大) と共
同研究を継続して表現の制限の一般論を考
察し、S-群によるパラメータ付けをもつ表
現の制限を一般の簡約代数群に対して拡張
した。

現在、 $U(n)$ に対する局所ラングランズ予
想は quasi-split するものを中心に海外にお
いて研究が進展しているところではあるが、
 $SU(n)$ に対する研究はあまりなされてい
ない。本研究による $U(n)$ と $SU(n)$ の局所
ラングランズ予想の関係についての理解は、
今後、 $SU(n)$ の局所ラングランズ予想が研
究されていく上で、最初のステップとなると考
えられる。

(2) 研究代表者は SL(n) の内部形式の
tempered な表現の L-packet に対しては、
斎藤裕氏 (京都大) との共同研究により精密

化された局所ラングランズ予想を証明していた。本研究ではそのときに証明できなかった $SL(n)$ の内部形式の non-tempered な表現の A-packet に対しても精密化された局所ラングランズ予想を証明した。

これにより、 $SL(n)$ の内部形式に対しては non-tempered な表現も含めて、Arthur と Vogan により精密化された局所ラングランズ予想が証明されたことになる。

$SL(n)$ は quasi-split していない多くの内部形式を持ちながらも自明でない S-群ももっている。

これまでの国内外の局所ラングランズ予想の研究は quasi-split している群に対するものが中心であった。

本研究のような quasi-split していない内部形式の系列に対して精密化された形の局所ラングランズ予想が証明されるのは初めてであり、quasi-split していない簡約代数群に対する局所ラングランズ予想の定式化に示唆を与えると考えられる。

また、精密化された局所ラングランズ予想においては、エンドスコピーの表現と間の指標の関係式を示す必要があるのだが、non-tempered な表現に対しては誘導表現の組成列が分からない為に指標の関係式が証明できないでいた。本研究においては、Badulescu による $GL(n)$ の内部形式に関する研究で使われた議論を拡張し、ゼレビンスキー対合を使うことにより誘導表現の組成列が完全には分からなくても non-tempered な表現の場合の指標の関係式を証明することができた。このような方法は、今後の一般の簡約代数群の non-tempered な A-packet に対する局所ラングランズ予想の研究に示唆を与えると思われる。

(3) 局所ラングランズ予想は、簡約代数群の表現とガロア群の表現の間の対応を予想している。このことから、簡約代数群の表現の不変量とガロア群の表現の不変量との間に関係があることが予測されるのであるが、これまでは、不変量の間関係について余り深いことは知られていなかった。

研究代表者は市野篤史氏（大阪市大）・池田保氏（京都大）との共同研究の中で、簡約代数群の離散系列表現の不変量である formal degree とガロア群の表現の不変量である L-因子・ ε -因子との間の関係について予想をたてることができた。

また、 $GL(n)$ の振じれたエンドスコピーの理論を使うことにより、 $U(3)$ の stable な離散系列表現に対して、予想を証明した。

このような関係はこれまで知られていないものであり、局所ラングランズ予想に対して、重要な視点を与えるものと考えられる。

また、新たな方向へ研究が発展していく契機

となる可能性がある。

実際、この研究結果以降、国内外の研究者による formal degree に対する新たな研究がいくつか始まった。

また、簡約代数群の表現の不変量とガロア群の不変量の間には深い関係が存在しているであろうことを伺わせる結果でもある。

(4) 離散系列表現の formal degree 以外にも、表現の不変量とガロア群の表現の不変量の間には深い関係があると思われる。このような関係のひとつとして Kottwitz--Shelstad の予想が捉えられる。精密化された局所ラングランズ予想においては、エンドスコピーの表現と間の指標の関係式が必要であるが、この関係式には定数倍の不定性が存在している。

$SL(n)$ のような quasi-split している簡約代数群においては Whittaker data を決めることにより、簡約代数群の表現の不変量である振じれた指標を正規化できる。また、ガロア群の表現の不変量である ε -因子を使うことにより移送因子も正規化することができる。

Kottwitz--Shelstad の予想はこのように正規化された場合にエンドスコピーと間の指標の関係式に現れる定数が 1 となることを予想する。

$SL(n)$ の場合には、この予想に関して、Henniart--Lemaire により、定数が表現に拠らないこととエンドスコピーが不分岐であれば定数が 1 となることが証明されていた。研究代表者は市野篤史氏（大阪市大）との共同研究で、(不分岐とは限らない) 一般のエンドスコピーに対して $SL(n)$ の場合の Kottwitz--Shelstad の予想が成り立つことを証明した。

これは、Henniart--Lemaire の結果の拡張である。

また、formal degree の場合と同様に、この結果も不変量の間には深い関係があることを示唆していると考えられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

① K. Hiraga, A. Ichino, T. Ikeda, Formal degrees and adjoit gamma-factors, Journal of the American Mathematical Society, 21, 2008, 283-304. 査読有

[学会発表] (計 8 件)

① 平賀 郁, $SL(N)$ の L-indistinguishability: 局所ラングランズ対応とエンドスコピー, 日本数学会特別講

演, 2009年9月24日, 大阪大学

- ② 平賀郁, Formal degrees and adjoint gamma-factors, 表現論シンポジウム「群の表現と等質空間上の調和解析」, 2007年9月4日, 数理解析研究所
- ③ 平賀郁, On the packets for inner forms of $SL(N)$, Tambara Workshop 2007 Geometry and Representations in Lie Theory, 2007年8月23日, 東京大学玉原国際セミナーハウス
- ④ 平賀郁, On packets for inner forms of $SL(N)$, France-Japan conference on Automorphic Endoscopy, 2007年6月12日, Centre International des Rencontres Mathematiques (France)
- ⑤ 平賀郁, ラングランズ予想について「エンドスコピーをめぐって」, 代数学シンポジウム, 2006年8月6日, 東京大学

[図書] (計 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計◇件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

- (1) 研究代表者 平賀 郁
京都大学・大学院理学研究科 (講師)

研究者番号 : 10260605

- (2) 連携研究者 今野 拓也
九州大学・大学院数理学研究院 (准教授)

研究者番号 : 00274431

- (3) 連携研究者 市野 篤史
大阪市立大学・大学院理学研究科 (准教授)

研究者番号 : 40347480

