

平成 21 年 6 月 5 日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540029

研究課題名(和文) 最大円分体の不分岐拡大体のガロア群

研究課題名(英文) Galois groups of unramified extensions over maximal cyclotomic fields

研究代表者

朝田 衛 (ASADA MAMORU)

京都工芸繊維大学・工学科学研究科・教授

研究者番号：30192462

研究成果の概要：

有限次代数体に 1 の素数乗根だけをすべて添加した円分体を k とする。有限次代数体の有限素点 v (剰余標数は、奇素数 p とする) をひとつ固定し、 v の k における惰性体を F 、分解体を Z とし、分解群を G とする。 p の外で不分岐な F の最大 $\text{pro-}p$ アーベル拡大体を M 、 p の外で不分岐な F の最大 $\text{pro-}p$ 拡大体を $M(p)$ とする。 M の F 上のガロア群 $\text{Gal}(M/F)$ は $\text{pro-}p$ アーベル群で G が作用する。従って、自然に G の p 進整数環上の完備群環 A 上の加群となる。本研究で得られた主な結果は次の通りである。

主結果 1 基礎体が有理数体の場合、 $\text{Gal}(M/F)$ は、 A 加群として、可算無限個の A の直積と同型となる。

主結果 2 基礎体が、条件「素点 v の絶対分岐指数が $p-1$ で割れない」を満たせば、 $\text{Gal}(M(p)/Z)$ は射影的な profinite group である。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	500,000	0	500,000
2007年度	500,000	150,000	650,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,500,000	300,000	1,800,000

研究分野：整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：(1) 代数学

1. 研究開始当初の背景

有限次代数体と有限体上の 1 変数代数関数体との類似はよく知られているが、大きな違いのひとつに、代数体の場合、関数体と異なり、定数拡大というものがない、ということがある。定数拡大の類似物の候補として、昔から考えられているものに、1 のべき根をすべて添加した最大円分体がある。(これは類

体論を関数体の場合も含めて取り扱うとき、特に相互律の証明手法に関して、意識されていたようである。) もう少し新しいものとしては、素数 p をひとつ固定して、1 の p べき乗根だけを添加した円分体もあり、岩沢理論として大きな一分野を形成している。それに比べた場合、最大円分体を定数拡大の類似物とみなす立場の研究は、いまだ十分な広

りを持っているとは言いがたく、未開の部分
がかなりあるように思われる。

関数体の場合、合同ゼータ関数が、定数拡大
体のガロア群の、最大不分岐アーベル拡大
体への作用と結びついており、岩沢理論にお
いても p 進 L 関数に関して、同様な現象が
ある（岩沢予想）。これらに鑑みると、最大
円分体の最大不分岐アーベル拡大体のガロ
ア群において、類似の現象がないか、と考
えることを禁じ得ない。

研究開始当初の少し以前に、最大円分体の、
分岐を制限した素数べき次アーベル拡大体
のガロア群の構造について、新しい結果を得
ていた。それは、円分ガロア群の内、素数
べき指数が 2 以上の部分から生ずる部分群の
作用も込めた構造である。素数乗根だけか
ら生ずる体 k の（円分）ガロア群の作用につ
いての研究が、基本的なことのひとつとして
浮かび上がると同時に、最大円分体ではなく、
その部分体である k 自身が、定数拡大体の
類似物とみなせるのではないかと思われる
事実を認識し始めていた。

2. 研究の目的

有限次代数体に 1 のべき根をすべて添加した
最大円分体 K および 1 の素数乗根だけを
添加した円分体 k を考える。それほど知ら
れていないように思われるが、有限体の代数
閉包は、1 の素数乗根だけを添加しても得ら
れる。また、この事実より、基礎体の素点の
この拡大体における分解群を惰性群で割った
商群は、素点のフロベニウス置換で生成され
る free profinite 群となることが従う。
これにより、体 k もまた、関数体の場合の
定数拡大の類似物の候補と見なすことができ
る。ふたつの体 K, k の種々のガロア拡大
体のガロア群の構造、特にアーベル拡大体
のガロア群の、円分ガロア群の作用も込めた
構造を調べることを目的とする。

3. 研究の方法

代数的整数論の一般論としてはもっとも
完成されたものである類体論は、ガロア群の
コホモロジー論を用いて整理され、深められ
た。また、無限次拡大体のガロア群の理解も、
profinite 群の一般論が整備されたこと
により深められ、例えば、古典的な embedding
problem との関連も明らかになった。これら、
代数体（および局所体）に関するコホモロ
ジー理論、embedding problem の理論を主な
道具として、有限体上の関数体との類似を念
頭に置きながら、研究目的に述べたガロア
群の構造を調べる。

4. 研究成果

(1) 有限次代数体に 1 の素数乗根だけを添
加した円分体を k とする。有限次代数体の

有限素点 v を一つ固定し、その剰余標数は、
奇素数 p とする。 v の k における惰性体
を F 、分解体を Z とし、分解群を
 $G(=\text{Gal}(F/Z))$ とする。 G は、有限体の絶対ガ
ロア群と同じく、一つの元で生成される
free profinite 群と同型となり、分解体と
惰性体の間は、いたるところ不分岐となる。
 G は F 上の種々のアーベル拡大体のガロ
ア群に作用する。

いま、次の F のふたつのガロア拡大体を考
える。ひとつは、 p の外で不分岐な最大
pro- p アーベル拡大体 M 、もう一つは p
の外で不分岐な最大 pro- p 拡大体 $M(p)$
である。 M の F 上のガロア群 $\text{Gal}(M/F)$
は pro- p アーベル群でしかも G が作用する。
従って、 G の p 進整数環上の完備群環を A
とすれば、自然に A 上の加群となる。

本研究で得られた主な結果は次の通りで
ある。

主結果 (I) 基礎体が有理数体の場合、
 $\text{Gal}(M/F)$ は、 A 加群として、可算無限個の A
の直積と同型となる。

主結果 (II) 基礎体が、条件「素点 v の絶
対分岐指数が $p-1$ で割れない」を満たせば、
 $\text{Gal}(M(p)/Z)$ は射影的な profinite group
である。

(I), (II) の関連について説明する。(I)
を示すために、 $\text{Gal}(M/F)$ より大きなガロ
ア群 $\text{Gal}(M(p)/Z)$ が強い性質(射影性)を持
つことを示すと((II))、これより、 $\text{Gal}(M/F)$
が射影的 A 加群であることが簡単に従う。

そこで次に、(I) より弱い次の主張 (III)
を示す：

(III) 基礎体が有理数体の場合、任意の「初
等的な」有限 A 加群 $E(m, n)$ に対して、
 $\text{Gal}(M/F)$ から $E(m, n)$ への全射準同型が存
在する。ここで、 $E(m, n)$ は G の唯一つの位
数 n の商群(n 次巡回群)の、標数 p の素
体上の群環の m 個の直和を表す。(G から商
群への射影を通して、自然に A 加群とみな
せる。)

これより、以前に得られていた、 A の可算無
限個の直積の(embedding problem による)特
徴付けを適用して、(I) が得られる。

このような証明方法であるから、 $\text{Gal}(M/F)$
の A 加群としての具体的な生成元について
は、今のところ、何もわかっていない。具
体的な生成元を求めるのは、ひとつの基本的
な問題だと思われる。

なお、(III) については、恐く基礎体が一
般の有限次代数体の場合でも成り立つだろ
うと思われる。(それが示されれば、主結果
(I) は、基礎体が (II) と同じ条件を満た

ば成り立つことが従う。)

素点 v の剰余標数 p と異なる素数 q について、 q の外で不分岐な F の最大アーベル $\text{pro-}q$ 拡大体のガロア群の構造も問題とした考えられるが、これについては、まだ十分考察を進めていない。

(2) (I), (II), (III) の内では、(II) が最も基本的であるが、その証明方法は、代数体の分岐を制限した $\text{pro-}p$ 拡大体のガロア群の研究を基にしている。

一般に、有限次代数体 k と素数 p に対して、 p の外で不分岐な k の最大 $\text{pro-}p$ 拡大体を $M(p)$ とするとき、ガロア群 $\text{Gal}(M(p)/k)$ については Shafarevich の先駆的な研究に始まり、H. Koch, O. Neumann などを経て、現在も盛んに研究されている。研究開始当初は、これらについての基本的な結果や、関連が深いと思われる結果 (O. Neumann) を調べた。その結果、特に分岐を制限した embedding problem についての Neukirch による研究が密接に関連していることが判明した。以下、これについて少し説明を加えておきたい。

上に述べたガロア群 $\text{Gal}(M(p)/k)$ の構造を調べるには、その有限素体係数のコホモロジー群を調べるのが基本的である。その第 1 段階は、コホモロジー群を局所的にとらえられる部分と、(局所的にはとらえられない) 大局的な部分とにわけるといものである。

局所的にとらえられる部分、すなわち局所ガロア群のコホモロジー群は、比較的簡単にとらえられる。一方、大局的な部分は、Shafarevich 群と呼ばれ、代数体のイデアル類群に似ており、捉えるのが難しい群である。

Neukirch は、Shafarevich 群が消えるという条件を、分岐を制限した embedding problem に関する条件に言い換えられることを (かなり以前に) 示していた。これは embedding problem の研究者にはよく知られていた内容のようであるが、従来は、Shafarevich 群が消えることから、embedding problem が解けることを導く、という方向のものとして意識されていたようである。(ちなみに、この Neukirch の結果は、基本的ではあるが、成書にはとりあげられていないようで、(長文の) 元論文で知るしかないようである。)

今回の研究成果を得るには、これを逆方向に用いることがポイントとなった。すなわち、素点 v の分解体 Z が十分大きな無限次代数体であることを利用して、Neukirch の条件が満たされることを示し、それにより Shafarevich 群が消えることを導くのである。これにより、局所的な条件とあわせて、

主結果 (II) が得られる。

Neukirch の条件が満たされることを示す部分はふたつに分かれる。ひとつは、前述した O. Neumann の以前の結果を用いて、有限 p 群に関する embedding problem に関する主張を示すことに帰着する部分である。ふたつめは、その主張を示す部分で、ここでは、有限 p 群を代数体上のガロア群として実現するという、Scholz, Reichardt, Shafarevich の結果の証明手法を用いる。

ふたつめの部分で、分解体 Z が十分大きく、数論的な性質「ほとんどすべての素数 q について、 q 素点の分岐指数は $q-1$ である」を持つという事実が、この証明手法を可能にした。(Z は、1 の q 乗根はほとんど含まないのであるが、この事実は、その分岐状況は、1 の q 乗根をほとんど含む場合と同じということを示している。)

(3) 最後に、研究の最終段階で考察を始めた問題について述べておく。再び 1 の素数乗根全体を添加した体を k とし、 p の外で不分岐な k の最大 $\text{pro-}p$ 拡大体を (同じ記号) $M(p)$ で表す。体 k が、有限体の代数閉包上の関数体の類似物と見なす立場からすれば、 $\text{Gal}(M(p)/k)$ の p -素点の惰性群全体で生成される部分群が、惰性群たちの free $\text{pro-}p$ product になるかどうか、という問題が考えられる。 $\text{Gal}(M(p)/k)$ 自身は free $\text{pro-}p$ 群であることが、以前の研究成果として得られているので、惰性群全体で生成される部分群も (一般論により) free $\text{pro-}p$ 群である。(ちなみに、それによる商群は、 k の最大不分岐 $\text{pro-}p$ 拡大体のガロア群であるが、それも free $\text{pro-}p$ 群であることが知られており (内田興二)、以前の研究成果の証明手法もそれにならうものである。)

大きな $\text{pro-}p$ 拡大体のガロア群の惰性群で生成される部分群の free product への分解に関しては、基礎体が有限次代数体の場合や、1 の p べき乗根全体を添加して得られる円分体の場合などに、Neukirch により始められ、その後も O. Neumann, K. Wingberg などにより、いろいろと研究されている。そして、free product に分解される、というタイプのいくつかの結果が成り立っている。従って、上のような問題の答えも肯定的ではないかと予想される。

この問題を考察するため、まず、基礎的なこととして、 $\text{Gal}(M(p)/k)$ の無限個の部分群の free $\text{pro-}p$ product をどう定義するか、ということ調べた。Free product の最も一般的な取り扱いは、今のところ、bundle of groups の generalized product t と呼ばれるものである (Neukirch-Schmidt-Wingberg, Cohomology of Number Fields)。上述の問題に即して言えば、まず、代数体 (無限次で

もよい) の素点全体の集合に、適当な位相 (constructive topology と呼ばれる) を入れる。このとき、その位相に関して、惰性群全体が $\text{Gal}(M(p)/k)$ の連続な部分群の族になり、それらに対する free pro-p product が定義される。 $\text{Gal}(M(p)/k)$ が惰性群たちの free pro-p product に分解するためのコホモロジー群による判定条件を確かめ、それが $\text{Gal}(M(p)/k)$ について満たされているかどうかを考察することが今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

①朝田 衛 1 の素数乗根全体で生成される体のアーベル拡大体のガロア群について
第14回早稲田大学整数論研究集会 2009 報告集 (印刷中) (査読無)

[学会発表] (計1件)

①朝田 衛 1 の素数乗根全体で生成される体のアーベル拡大体のガロア群について
第14回早稲田大学整数論研究集会 2009
2009年3月9日 早稲田大学大久保キャンパス

6. 研究組織

(1) 研究代表者

朝田 衛 (ASADA MAMORU)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授
研究者番号: 30192462

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者