様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　５月２２日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００６～２００８
課題番号：１８５４００３５
研究課題名（和文）　多重線形写像を係数にもつ形式的べき級数からの積の構成とその応用

研究課題名（英文）　Algebra multiplication derived from the power series with coefficients of multilinear maps

研究代表者
久保　富士男（KUBO FUJIO）
広島大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：８０１１２１６８

研究成果の概要：「問題：ある積に最も近い良く知られた積はなにか？　それを見つけるシステマチックな方法を発見せよ」と大きな枠組みに設定した．任意の積を表す点と結合代数を表す多様体上の点の距離の二乗を最小にする点を見つける微分幾何学的手法で臨んだ．この新規テーマのモデルを構築すべく，簡単な例を設定・計算を行った．また、結合代数を表わす代数的集合はいくつかの部分に分かれる.それぞれの部分の点達が代数的変形(研究課題名にある構成法）で移り合えることを発見した.この過程で,「多項式変形」という概念を導入した.

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	500,000	0	500,000
２００７年度	600,000	180,000	780,000
２００８年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	1,600,000	330,000	1,930,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数的変形理論，コホモロジー，三項積，近似代数，多項式変形

１．研究開始当初の背景

【代数的変形理論】
本研究の原点は 1964 年に出版された Gerstenhaber の一連の論文（Anal of Math）に始まる「代数構造の変形理論」である．二項積である結合代数の積の変形は多重線形写像を係数にもつ形式的べき級数で構成される。変形理論は束縛条件“変形後も結合的”を提案し,Hochschild コホモロジーを用いて論じている．複素多様体の変形理論の代数化である．

理論展開は,
(1)『剛性問題』: 自明でない変形は存在しないか
(2)『Integrable problem』: 与えられた線形項に対して束縛条件を満たす積が構成できるか』
これらの問題への一つの解答は，２次，３次のコホモロジーが消滅すれば肯定的であるというものである.
同様の理論展開が，以下のようなコホモロジーを用いてなされた.
(1) リー代数：Chevalley-Eilenberg コホモ

ロジー (Nijenhuis and Richardson)
(2) Bialgebra : Hochschild 余鎖複体と"co--Hochschild"余鎖複体との２重余複体 のホモロジー (Gerstenhaber and Schack),
(3) ポアソン代数： Hochschild 余鎖複体と Chevalley-Eilenberg 余鎖複体との２重余複体のホモロジー (Flato et al, Kubo),
(4) 三項積をもつ Lie triple system ：山口清氏の考案した奇数次のみもつコホモロジー (Kubo and Taniguchi)

【応用からの視点】
構成された積の応用について述べる．Bayen 達は関数環における変形された結合積 (Moyal star product) およびその＊－固有関数を用いることにより，従来の Operator Algebra による量子化とは独立に，量子化問題を考察した．関数環から出ることなく量子力学を展開できるというものであるが，これは Gerstenhaber 理論の応用の典型的な成果であろう．

２．研究の目的

【研究の全体構想】
多重線形写像を係数にもつ形式的べき級数で構成される積は変形前が結合代数であっても同様の結合法則を満たすとは限らない。Gerstenhaber 理論の枠組みをはみ出すものである。束縛条件を満たさないこれらの積が数学的にどのような役割を果たすのか、また、工学の諸現象にどのように現れるかを解明することは重要である。

【特色と期待される成果】
筆者は上述の構想のもとで「有限次元ポアソン代数」,「単純 leibniz 対」,「Lie triple system の変形理論」などの新しい提案とその研究を行ってきた．その過程で次の知見を得た：

<u>知見１</u>
代数系の適切なコホモロジーの算術的構成と判定に変形理論が応用できる．

<u>知見２</u>
摂動理論では考察の対象が変形され，計算には通常の積を用いる．一方，変形理論においては対象はそのままで，変形された積を用いて計算される．

知見 2 については，「摂動と変形の区別は難しい」というこれまでの指摘に対する申請者の回答である．これらを研究遂行の羅針盤に据えたことに特色があり，それぞれ以下のような成果が期待される．

(1) 同じクラスに属することから要求される変形方程式から双対境界作用素が算術的に求まるいうもので，どのような代数系にも適用可能であることの実証．
(2) 逆問題も量子力学と同様に関数解析のことばで語られている．これを，適当な代数の変形積とその表現の変形された作用を用いて表現することことにより代数的問題に持ち込めれば，大きな発展が予想される．そして，工学への応用も期待でき，そこからのフィードバックが代数的変形理論の新しい展開へとつながる．
(3) 工学などの応用面で現れる得体の知れない代数系に対しての対応の方法を提案できる。どのような代数系に対しても、それに最も近い代数積でそれを近似し、それでもって計算の実行を提案するものである。

【従来の研究の継続】
上記の新しいメインテーマに加え，従来から進めてきた２つの積をもつ代数の変形理論や変形理論の応用についての研究も対象とする。

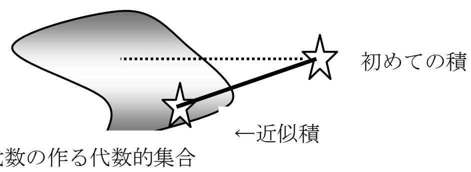
３．研究の方法

従来現れなかった積（代数）に直面したとき、その積に最も近い積で計算を代用することは自然に思われる。代数を表す構造定数の作る代数的集合に着目して，

「積を空間内の点で表す場合，ある積を表す点に最も近い良く知られた積を表す点はなにか？それを見つけるシステマチックな方法を発見せよ.」

と問題設定をして，この新規のテーマの一つのモデルの構築およびその解析を行う。そのため、以下の概念を明確にする：

(1) 近いとは何か
代数多様体では近さの概念が無く、代数幾何学的には取り扱えない。そこで、通常のユークリッド距離を用いて近さを表す。すなわち，空間内に結合代数を表す点のつくる代数的集合を考え、新規の積を表す点との距離が最小となる点を代数的集合の中に見出すという手法である。以下は、イメージ図である。



(2) 最小距離の点を見出す方法は、条件付極値問題となるが、代数的集合がいくつかの二次の等式で表されているので行列を用いた最小２乗法の適用が考えられる。

(3) Gerstenhabaer の提唱する従来の変形理論の枠組みに入らない積も取り扱うため，新たなる変形理論の枠組みを構築する。

４．研究成果

(1) メインテーマは以下の通り：

「積を空間内の点で表す場合，ある積を表す点に最も近い良く知られた積を表す点はなにか？それを見つけるシステマチックな方法を発見せよ.」

研究成果は投稿中の論文

F.Kubo & F.Suenobu, The closest associative structures of algebra structures

にまとめた。また、第 24 回リー代数サマーセミナー（平成 20 年 8 月 30 日，福岡教育大学）でその概要を報告した。

［概要］：この新規のテーマの一つのモデルを構築すべく，簡単な例（二次元）の計算を行った．解析の戦略は以下の通りである：

①代数的集合をグレブナ基底を用いてパラメータ表示する。
②多変数の極値問題として目的の点を見つけるという.
③グレブナ基底や最小値の計算には数式処理ソフトを用いる.

この方針で得られた具体的で簡単な例をメモしておく：

2 次元代数（結合法則を満たさない）

$$aa=a+b,\quad ab=b$$
$$ba=0,\quad bb=b$$

に最も近い結合法則を満たす 2 次元代数の積は

$$aa = 1.03122a + 0.96508b$$
$$ab = 0.611284a - 0.129634b$$
$$ba = 0.611284a - 0.129634b$$
$$bb = -0.0817353a + 0.766503b$$

である。

また、上記で述べたように，従来の変形理論の枠組みには無い対象も取り扱うため新しい概念を提案した。上記の結合代数を表わす代数的集合はいくつかの部分に分かれる.それぞれの部分の点たちを代数的変形（研究課題名にある構成法）で移り合えることを発見した.この過程で,「多項式変形」という概念を導入した.これ自身も新たな研究対象である.

(2) 他の代数系への提案アルゴリズムの適用：
同様の結果が 3 次元リー代数でも得られた。（現在、投稿準備中）　このケースでは、上記の戦略のうち、グレブナ基底を用いる方法は有効でないことが分かり、Jacobson の方法に従ったパラメータ表示がうまく行くことが判明している。

(3) 提案アルゴリズムの工学への応用：
メインテーマの研究中、常に工学への応用を意識してきた。現在、誤差解析への応用の糸口をつかんでいる。

(4) ２つの積をもつ代数についての変形理論の研究も進めてきた。

Fujio Kubo, Ring 2007 (Proceedings of the Fifth China-Japan-Korea conference), World Scientific, 2009, 235-239

にその成果をまとめた。

［概要］：リー積[-,-]に対して，積（xy と表示）が

$$[a,bc] = [a,b]c+b[a,c]$$

を満たすとき，この積を compatible であるという。上記論文で有限次元半単純リー代数についてすべて求めた。主要な定理は以下の通りである：

定理　g が A_n 型でない単純リー代数数であれば

$$\mathrm{Hom}_g(g\otimes g, g) = kL$$

が成り立ち，g が A_n 型の単純リー代数であれば

$$\mathrm{Hom}_g(g\otimes g, g) = kL\oplus kD$$

が成り立つ。ここで、k は標数０の代数的閉体であり、K および L は以下で定義される：

$$L(x\otimes y) = xy,$$
$$D(x\otimes y) = xy-(1/(n+1))\mathrm{Tr}(xy)E$$

この定理は、通常の積とその変形ですべてが表せることを示している。系として、久保自身の定理の別証明を与えることが出来た。

系(久保)　有限次元単純リー積と compatible な結合積は自明な積(ab = 0)に限る。

(5) 山口清氏は４元数・８元数の一般化を試みておられた．それに対し，一般化された数体系を代数的変形理論の枠組みの中でとらえることを提案し，その一部は基本的な変形によって得られることを明らかにして、山口氏の研究に協力した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２件）

1. Fujio Kubo, Ring 2007 (Proceedings of the Fifth China-Japan-Korea conference), World Scientific, 査読有, 2009, 235--239

2. Fujio Kubo, A structure of Hom_(g⊗g, g) and an application, Proceedings of the 23rd Summer seminar on Lie algebras and related topics, 査読無, 2008, 19--25

〔学会発表〕（計　３件）

1. 末信郁也、久保富士男, The Closest associative algebras structures to algebra structures, 第 24 回リー代数サマーセミナー, 平成 20 年 8 月 30 日, 福岡教育大学

2. Fujio Kubo, Compatible algebra structures of Lie algebras, The Fifth China-Japan-Korea International Symposium on Ring Theory, 2007年9月13日, 国立オリンピック記念
青少年センター

3. Fujio Kubo, A structure of Hom_g(g⊗g, g) and an application, Proceedings of the 23rd Summer seminar on Lie algebras and related topics, 第23回リー代数サマーセミナー, 平成19年8月31日, 海上保安大学

６．研究組織
(1)研究代表者
久保　富士男 (KUBO FUJIO)
広島大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：80112168

(2)研究分担者

(3)連携研究者