

平成 21 年 5 月 21 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006 ～ 2008

課題番号：18540037

研究課題名（和文） 保型形式の周期の表現論・整数論的研究

研究課題名（英文） Representation theoretic and arithmetic study of periods of automorphic forms

研究代表者

今野 拓也 (KONNO TAKUYA)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号：00274431

研究成果の概要：保型形式のモジュラーサイクル上の周期を保型表現論、特にテータ対応を用いて研究した。テータ対応の基盤となるのは局所簡約 dual pair の間の局所テータ対応だが、実ユニタリ群からなる dual pair の間の局所テータ対応の明示的な記述を与えた。また非アルキメデス局所体の場合にも 2 変数以下のユニタリ群に対して同様な記述を得た。その際に副産物として 2 変数ユニタリ群の 1 変数ユニタリ部分群に沿っての局所周期についての Gross-Prasad 予想を証明した。またこれを用いて 4 変数準分裂ユニタリ群上の CAP 保型形式と呼ばれる重要な保型形式の族を全て記述した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,200,000	0	1,200,000
2007 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	690,000	4,190,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：整数論

1. 研究開始当初の背景

代数体上の多様体の Hasse-Weil ゼータ関数などの L 関数の (半) 整数点での値は深い整数論的意味を持ち、それに関する多くの予想や問題が提起されている。中でも保型形式に付随する保型 L 関数はこうした予想の試金石となる重要なレパートリーである。

保型形式のモジュラーサイクル上の周期積分はしばしばこの保型 L 関数値の記述に現れる。またその値により保型形式の代数体上の有理性が示される場合もあり、それ自体が保

型形式の整数論的研究にとって大切である。近年ではさらに、 p 進保型形式とそれに付随する Galois 表現の研究の急速に発展し、その結果として整数論の歴史的問題が次々と解決されている。この際にも保型形式の周期とその p 進類似の精密な構造が用いられている。

これらの研究をさらに発展させるためには、保型形式の周期積分値の構造、特にそれを保型形式の局所成分からの寄与である局所周期と大域因子に分解して、それぞれを記述することが求められている。

2. 研究の目的

背景に述べた L 函数値の精密な記述や p 進保型形式の周期などへの応用には、局所周期の果たす役割が大きい。そこで個々の保型形式に依存せずそれが生成する保型表現にのみよる形で周期を記述する必要がある。これは次の二つの問題に分解する。

- (1) 局所周期の記述。保型表現は簡約アデール群の既約表現であるから、その局所成分は局所体上の簡約群 G のある既約許容表現 π である。モジュラーサイクルは G の簡約部分群 H から定まり、周期積分は π 上の H 不変線型形式を与える。局所的な問題は π が H 不変線型形式を持つための条件を明らかにすることと、その H 不変線型形式の標準的な記述（局所周期と呼ぶ）を与えることである。
- (2) 周期の記述。大域的な問題は局所周期がいたるところ消えていない保型表現の周期を局所周期の Euler 積と L 函数値やその商である大域因子の積の形に記述することである。

また局所体上の簡約群の表現は局所 Langlands 予想により、L パラメタに付随する L パケットに振り分けられ、各 L パケット内の表現は内視論 (endoscopy) を用いて記述されると考えられている。

(1)の問題については、この L パケットが H 不変線型形式を持つ表現を含むための条件については、それを L パケットに付随する L, ε 因子で記述するという局所 Gross-Prasad 予想が提起されている。予想ではまた L パケット内のどの表現が H 不変線型形式を持っているかを内視論の言葉で予測している。

(2)の大域的問題に関しては Gross-Prasad の予想を仮定して、保型表現の周期を局所周期の Euler 積と保型表現の Rankin 積 L 函数および随伴 L 函数と呼ばれる L 函数の値で記述するという、池田・市野の予想が知られている。

これらの予想はいずれも内視論や軌道構造などの理由により特殊直交群の場合に定式化されてきた。同時に Waldspurger, Harris-Kudla, 池田, 市野らにより 5 変数以下の直手直交群に対しては予想のいくつかの例が確立されている。これらはいずれも 4 変数以下の直交群と一般線型群の間の「幸運な同型」の存在によっており、特に一般線型群の内視論が自明であることが重要なカギとなっている。

一方、最近になって豊富な数論的応用を持つユニタリ群の保型表現に対しても同様の問題が定式化され、その確立が強く望まれている。しかしユニタリ群では 2 変数の場合からすでに非自明な内視論が現れ、内視論と上記の予想との関係を確認することが第一の要請となる。これはさらに高次の特殊直交群を扱う場合も同様である。

当研究ではこれを低次元でありながら本格的な L 不可分性が現れるランク 1、すなわち 2 または 3 変数のユニタリ群の場合に具体的に解決することを目的としていた。これらの場合はいずれも L パラメタと内視論による既約表現の分類がテータ対応など具体的な手法によって完成しており、周期の記述が現実的であったからである。ただし周期の記述に現れる L 函数（特に随伴 L 函数が難しい）3 変数の場合は局所理論の解決、ことに局所 Gross-Prasad 予想を目指していた。

3. 研究の方法

保型形式をテータ級数として実現することでその周期を計算することは Hecke に始まり、現代では Kudla によるシーソー dual pair のアイデアとして広く拡張されている。相対跡公式という新技術が確立されつつあるものの、現在のところ、周期の精密な記述を可能にする方法論としてはテータ対応が唯一のものであると考えている。

同研究でもテータリフトとして保型表現やその局所成分を構成し、それとシーソー dual pair との関係を用いて表現上の H 不変線型形式や周期を計算する方法を中心に据えている。これはテータリフトが保型 L 函数の積分表示とも関連が深く、周期と L 函数値の関係がそこから引き出せる場合が多いことにもよっている。

まず Weil 表現の構成に選択の余地があるなど、論点が複雑なユニタリ群のテータ対応について定期的にセミナーを行い、技術面の整備を進めた。特にアルキメデス局所理論については、松本久義氏（東大）や西山亨氏（京大）ら同分野の専門家と研究連絡を取ることでも多くを得た。

内視論は志村多様体のゼータ函数を記述する際に現れる困難な現象に対処する形で導入されたため、その本性的な構造は分かっていないことが多い。近年の幾何的手法による fundamental lemma の問題の解決はその構造に光を当てるものである。同研究でもこの研究を行った B. C. Ngo 氏 (Princeton 高等研究所) と情報交換を行った。また fundamental

lemmaの拡張を目指すP.H. Chaudouard氏を招聘して、講演会やセミナーなどを行って内視論の幾何的構造についての理解を深めた。内視論は内視等式と呼ばれる多数の指標公式で与えられるため、周期と内視論の関係は周期と表現の指標との関係を付けることで得られると考えられる。そのためには内視等式そのものの具体的な構成を理解する必要がある。2007年度にはフランスCIRMでの国際会議で講演すると共に、こうした研究を急速に進めているC. Moeglin氏(Paris VII大学)らとの研究連絡を通じて内視論の現状について情報を収集した。

同時に整数論への周期の記述の応用についてセミナーやミニワークショップを行って理解を深めた。特に池田・市野の予想では正則な場合だけを考えているRankin積L関数が極を持つ場合は、Gross-Zagier公式の拡張となる現象を与えていると考えられ、その整数論的意義は重要である。これについては千田雅隆(東北大)、山内卓也(広島大)両氏の主催したワークショップに参加して、概説講演を行った。

一方、こうした結果の応用として進展が著しい、R=T型定理とその応用についても情報を集めた。まずParis VII大学に滞在し、同大学やParis-Sud大学での同分野の講演に参加した。また国内では2007年度末に行われたR=Tの最近の進展に関する勉強会にも参加した。

これら以外にも成果発表として、Singapore国立大学やInha大学でのシンポジウムに参加、講演した際に、D. Jiang氏(ミネソタ大)やK. Murty氏(トロント大)、肥田晴三氏(UCLA)ら関連分野の専門家と研究連絡を行ったことが、研究上の大きな助けとなっている。

4. 研究成果

テータ対応を用いて周期のような関数の制限を扱う際に函数解析的な問題を引き起こすのはアルキメデス素点での局所理論である。これを考える表現を限定することで解決しようと、まずは実ユニタリ群の間の局所テータ対応を考察した。実ユニタリ群のテータ対応についてはすでにA. Paulによる明示的な記述があった。しかしそれはLパラメタや内視論の言葉では書かれておらず、特に群上の座標を取り替えると結果も変わるという難点があった。

問題の根本は、30年来用いられてきた柏原・Vergneによる実ユニタリ群のWeil表現のFockモデルの記述自体が座標の取り方に依存

しているためだった。これをM. Harrisによるダブリングのアイデアを用いて構成し直すことで、 L_ε 因子を用いたFockモデルの記述が得られた。これは虚数単位などの補助的座標によらない自然なものであり、これを用いることで実ユニタリ群の既約表現の間のテータ対応とendoscopyの間の精密な関係を予測したPrasadの予想が証明できた。

次いで2変数、3変数ユニタリ群の局所周期の問題を考えるため、非アルキメデス局所体上の低次ユニタリ群の間の局所テータ対応を考察した。まずLabesse-Langlandsの研究に倣って2変数ユニタリ群の内視論を記述し、それを用いて安定跡公式を書いた。次いでこれを互いに比較することにより、2変数ユニタリ群のLパッケージやその保型表現への寄与を明示的に記述した。この内容については九州大学で講義を行い、書籍として現在まとめているところである。この記述とテータ対応を組み合わせることで、2変数ユニタリ群の内視的Lパッケージを1変数ユニタリ群からの局所、大域テータ対応として具体的に構成することができた。

この実現とシーソー dual pairの議論を組み合わせることで、2変数ユニタリ群の表現の1変数ユニタリ部分群への制限に関するGross-Prasadの局所予想が証明できた。これはGL(2)の既約表現の指標に関する齋藤・Tunnellの公式の一般化になっている。この場合の池田・市野の予想については現在考察を進めているが、まだ確定的なアイデアを得るには至っていない。

さらにこの局所Gross-Prasad予想とテータ級数のWhittaker-Fourier係数の記述を組み合わせることで、2変数準分裂ユニタリ群U(1,1)から任意の2変数ユニタリ群への局所テータ対応を決定した。これでこの場合の局所テータ対応を内視論と表現の ε 因子で記述するPrasadの予想を証明したことになる。

さて、このPrasad予想の結果をテータ対応のタワー性と呼ばれる性質と組み合わせることにより、準分裂な偶数変数ユニタリ群の面白い超カスプ表現が構成できる。特に4変数準分裂ユニタリ群U(2,2)の場合にはさらに広いクラスの既約表現を構成できる。これらの既約表現の指標を先のシーソー dual pairを使って計算する試みには半年ほどの期間をかけて取り組み、一応、明示的な指標公式が得られた。しかしアルキメデス的な場合と違い、 ε 因子を使ったWeylの分母の指標展開が複数あるため応用には耐えないことがわかった。

一方、こうして得られる既約表現を使うことで、代数体上の $U(2, 2)$ の CAP 保型形式と呼ばれるカスプ保型表現が全て構成できた。これは局所的にはほとんど全ての素点で非緩増加ながら、カスプ形式(つまりアデール群上で急減少)である保型形式で、一般に函数次元が非常に低いという特徴を持つ。実際、我々の得た CAP 保型形式は $U(2, 2)$ 内の 3 変数ユニタリ部分群に沿って周期を持つことがわかっている。特にこの場合の局所 Gross-Prasad 予想および池田・市野の予想は非常に現実的な問題であるが、これも今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① 今野拓也、Local Gross-Prasad conjecture for $U(2)$, Proc. National Inst. Math. Sci., 3 (2008), pp37-47. 査読無し。
- ② 平賀郁、市野篤史、池田保、Formal degrees and the adjoint γ -factors, Journal of the Amer. Math. Soc. 21 (2008), 283-304.
- ③ 今野拓也、今野和子、Local θ -correspondence for real unitary dual pairs, RIMS Kokyuroku Bessatsu B7: Representation Theory and Analysis on Homogeneous Spaces ed. H. Sekiguchi April, 2008, pp. 57-72. 査読あり。
- ④ 今野拓也、今野和子、On doubling construction for real unitary dual pairs, Kyushu Journal of Math. 61 (2007), pp. 35-82. 査読あり
- ⑤ 市野篤史、On the Siegel-Weil formula for unitary groups, Math. Zeit. 255 (2007), pp. 721-729.

[学会発表] (計 6 件)

- ① 今野拓也、Local Gross-Prasad conjecture for $U(2)$, International Symposium on Automorphic Forms and Shimura Variety, Inha 大学 (韓国)、2008 年 11 月 27 日。
- ② 今野拓也、 $GL(2)$ 上の保型形式と L 函数、第 16 回整数論サマースクール、幕張メッセ、2008 年 8 月 18 日。
- ③ 今野拓也、Local Gross-Prasad conjecture for $U(2)$, Workshop on Representation Theory and Automorphic Forms, Singapore 国立大学、2008 年 6 月 25 日。

④ 今野拓也、総実体上の Gross-Zagier 型公式紹介、Heegner 点と Gross-Zagier 公式勉強会、東北大学、2007 年 10 月 10 日。

⑤ 今野拓也、Endoscopic identities for CAP representations of $U(2, 2)$, France-Japan conference on automorphic endoscopy, CIRM (フランス)、2007 年 6 月 12 日。

⑥ 今野拓也、Spectral decomposition of the automorphic spectrum of $GSp(4)$, 整数論オータムワークショップ、白馬ハイマウントホテル、2006 年 11 月 8 日。

⑦ 今野拓也、今野和子、実ユニタリ reductive dual pair のダブリング構成法について、RIMS 研究集会「表現論と等質空間上の解析学」、京大数理研、2006 年 8 月 22 日。

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

今野拓也 (KONNO TAKUYA)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：00274431

(2) 研究分担者
()

研究者番号：

(3) 連携研究者
平賀郁 (HIRAGA KAORU)
京都大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号：10260605

市野篤史 (ICHINO ATSUSHI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号：40347480