

平成 22 年 6 月 16 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006 ～ 2009

課題番号：18540044

研究課題名 (和文) 安定圏を用いたシジジー問題研究

研究課題名 (英文) Syzygy problems by method of stable categories

研究代表者

加藤 希理子 (KATO KIRIKO)

大阪府立大学・理学系研究科・准教授

研究者番号：00347478

研究成果の概要(和文):安定圏を扱う際に、ホモトピー圏の三角構造を用いるという立場から、射影加群の鎖複体からなるホモトピー圏についての研究が中心となった。その成果は3方向に大別できる。第一に、ホモトピー圏の部分圏の構造を研究し、極めて強い対称性を呈する捩れ対の組の存在を示し、新たな三角同値を得た。第二に、安定圏と三角圏の差を研究し、射の単射表現性が三角圏への障碍になることに着目して、射の単射表現性の必要十分条件を得た。第3に、正余次元加群のシジジー同値類に関する研究では、環が整域であることは、すべての加群が正余次元加群と1階シジジー同値になるための必要十分条件であることを得た。

研究成果の概要(英文): We mainly studied homotopy categories of chain complexes of projective modules because our standpoint is to use a triangle structure of homotopy categories to investigate stable categories. The results of this project are divided into the following three groups. The first one is on the symmetry caused by torsion pairs. We found a structure of torsion pairs with strong symmetry which leads us to a new triangle equivalence. The second one is on representability by monomorphisms (rbm) which measures the obstruction for the category to be triangulated.

The third one is on syzygies of modules with positive codimension. We obtained that every module is equivalent to some module with positive codimension up to first syzygy if and only if the ring is an integral domain.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900000	0	900000
2007年度	700000	210000	910000
2008年度	700000	210000	910000
2009年度	700000	210000	910000
年度			
総計	3000000	630000	3630000

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環論

1. 研究開始当初の背景

加群のシジジーは、ホモロジー代数の中心的主題である。例えば剰余体のシジジーは、局所環のホモロジー的特徴づけと同時に、表現論への大きな鍵を与えてきた。

加群が(別の加群の)シジジー加群であることに關する特徴づけは、Auslander-Bridger, Evans-Griffithらによって正規列の長さや零化イデアルなどイデアル論的な研究が伝統的であった。従って、本研究も当初は、加群のホモロジー代数を用いて計算することを念頭に計画が立てられた。

2. 研究の目的

可換環上の加群 M に対し、射影被覆 $P_M \rightarrow M$ の核 ΩM を M の 1 階シジジー加群と呼ぶ。 M の高階シジジー加群は、 $\Omega^n M = \Omega \Omega^{n-1} M$ と帰納的に定義する。加群の射 $f: M \rightarrow N$ は、射 $\Omega f: \Omega M \rightarrow \Omega N$ を引き起こすから、 Ω は、射影安定圏上の自己関手となる。2 つの加群 (または射) は、それらの十分高階なシジジーが同型であるとき、シジジー同値であるという。

本研究は、加群や射のシジジー同値によって、環や加群を特徴づけることを目的とした。与えられた加群 M に対して、シジジー加群 ΩM を求めるのではなく、逆に、 ΩM が与えられたときに、 M (一般には一意でない) を求めようというのが研究代表者の問題意識である。つまり、シジジー逆問題とは、「良い」性質をもつ加群 (あるいは射) とシジジー同値になるための条件をみつけよう、ということである。この問題に関する古典的な例としては、2 次元正則環上の加群がイデアルとシジジー同値になることを示した Bourbaki 列が知られている。

具体的なテーマとしては、(1) 加群のシジジー逆問題 (2) 射のシジジー逆問題 (3) シジジー圏の構成 を中心に研究を進めた。

(1) 加群のシジジー逆問題として、興味ぶかいのは、剰余体のような、余次元付き加群のシジジーである。環が $SC(r)$ 条件をみたすとは、全ての加群が余次元 r の加群とシジジー同値であることをいう。各加群の $SC(r)$ 条件および環 $SC(r)$ 条件をイデアル論的に特徴づけることを目的とした。

(2) 射のシジジー逆問題を考える際に注目されるのは、単射表現性(rbm)である。環の

加群圏における全ての射は、全射と安定同値であるが、単射とは必ずしも安定同値でない。単射と安定同値であるような射を、rbm(represented by monomorphisms)であるという。全ての射が rbm なることは、安定圏が三角圏になるための必要十分条件である。すなわち、rbm 性は、安定圏が三角圏からどのくらい離れているかを表す指標になる。研究代表者は、特別な射の安定同値が安定圏の三角性を記述することを発見し、射の安定同値から環をホモロジー代数的に階層付ける試みを続けている。

(3) 自然数 n に対して、 $\Omega^n M$ なる形の加群の成す圏を n 階シジジー圏という。与えられた加群が n 階シジジー圏に属するかどうかは、70~80 年代に盛んに研究された古典的な問題であるが、今尚不明な部分も多い。例えば、 n 階シジジー圏は、一般には extension についても直和因子についても閉じていないし、 ΩM が n 階シジジー圏に属しても、 M が $n-1$ 階シジジー圏に属するとは限らない。この点に関して Auslander-Bridger の取ったアプローチは、 n 階シジジー加群よりも、少しだけ強い (しかし Gorenstein 環の場合には同等になるような) 条件を考えるというものである。この条件は、加群 M と自然数 n によって定まる特殊な射 $\Psi^n M$ の rbm 性と深く関わっており、例えばすべての $\Psi^1 M$ が rbm なら、1 階シジジー圏は、extension closed になる。与えられた加群が n 階シジジーかどうかを判定する方法を、射の rbm 性を機軸に考察することを目的とした。

3. 研究の方法 シジジー逆問題に対して、有効なアプローチとして取り上げたのは、安定圏の枠組みである。その理由は、射のシジジー同値と安定同値の間には強い類似性があるからである。まず、安定同値ならば、シジジー同値である。逆は成立しないが、射が n 階シジジー同値ならば、安定擬核の射影次元は $n+1$ 以下であり、安定同値への距離がシジジー同値の階数で測れることがわかる。研究が進むにつれて、加群を加群の枠だけでは捉えきれない現象があることに気づき、安定圏を鎖複体のホモトピー圏に埋め込んで、ホモトピー圏の三角圏構造を利用する方法を主として用いた。

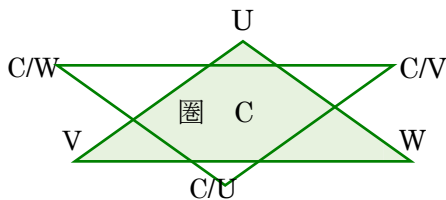
また、各分野で現れる代数的三角圏の問題意識を探り、新たなる手法を見出すために研究

集会「代数的三角圏とその周辺」を主催して情報収集を行った。

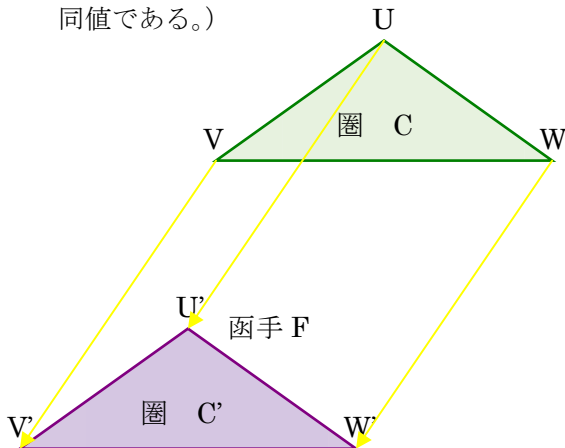
4. 研究成果 安定圏を扱う際に、ホモトピー圏の三角構造を用いるという立場から、射影加群の鎖複体からなるホモトピー圏についての研究が中心となった。

(1) ホモトピー圏の対称性に関する研究。

ホモトピー圏のひとつである拡大特異圏について研究し、この圏に、著しい対称性を呈する部分圏の組(三対称 recollement)があることを発見し、それを用いて拡大環(上半三角行列環)の Cohen-Macaulay 安定圏との三角同値を示した(伊山・宮地との共同研究)。得られた三角同値は、(古典的な)特異圏と Cohen-Macaulay 加群の安定圏との三角同値を示した Buchweitz の定理を思い起こさせる結果である。実際、Buchweitz の定理は Gorenstein 環上の Cohen-Macaulay 近似の三角圏的な記述と捉えてみると、我々の結果は双方向 Cohen-Macaulay 近似であるともいえる。拡大環の Cohen-Macaulay 圏は Cohen-Macaulay 加群間の線型写像からなるからである。三対称 recollement は、3つの部分圏からなるが、これらの部分圏および商圏がすべて三角同値になる、極めて高い対称性を持つ。



三対称 recollement は 3 組の捩れ対であるので、三対称 recollement を持つ三角圏の間の函手が同値であるかどうかは、ひとつの部分圏への制限が同値であるかどうかを見れば良い。(下図において、 $F|_U$ が同値なら F は同値である。)



我々の扱った拡大特異圏が三対称 recollement の初めての報告例になったが、さらに研究をすすめると、三角圏の Calabi-Yau 構造から自然に導かれること、任意の Frobenius 圏から三対称 recollement を持つ圏が構成できることも解った(伊山・宮地との共同研究)。三対称 recollement を持つ圏として、対称 Auslander 圏、対称 Bass 圏を研究した(P.Jorgensen との共同研究)。

(2) 安定圏の三角圏との差異を測る研究。安定圏は三角圏に近い性質をもっているが、任意の射は必ずしも完全列に埋め込めるとは限らないから、安定圏の三角圏からの隔たりは、射の単射表現性によって測ることができる。射の単射表現性の必要十分条件は(非安定)核が 1 階シジジー加群であることであることを得た。

(3) 正次元加群のシジジー同値類に関する研究。正次元加群の高階シジジー近似は、特殊な形(環による重双対)であるため、ほかの加群のシジジー同値を論じる鍵である。成果としては、任意の加群が正次元加群と 1 階シジジー同値になるための必要十分条件は、環が整域なることであることを得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

① Kiriko Kato, Morphisms represented by monomorphisms, Journal of Pure and Applied Algebra, vol.208 no.1, 261-283, 2008, 査読有

② Kiriko Kato, Syzygies of modules with positive codimension, Journal of Algebra, vol.318 no.1, 25-36, 2008, 査読有

[学会発表] (計 6 件)

① Kiriko Kato, Recollement of homotopy categories and Cohen-Macaulay modules, Commutative Algebra:Connections with Algebraic Topology and Representation Theory, 米国Nebraska大学, 2008年5月19日

② Kiriko Kato, Quotient category of homotopy category, 第29回可換環論シンポジウム, 愛知県名古屋市, 2007年11月21日

③ Kiriko Kato, Morphisms represented by monomorphisms, Workshop on triangulated categories, 英国Leeds大学, 2006年8月15日

〔その他〕(計 1 件)

ホームページ

<http://www.mi.s.osakafu-u.ac.jp/~kiriko/seminar/09JulRIMS/09JulRIMS.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

加藤 希理子 (KATO KIRIKO)
大阪府立大学・理学系研究科・准教授
研究者番号：00347478

(2) 研究分担者

入江 幸右衛門 (IRIE KOUYEMON)
大阪府立大学・理学系研究科・教授
研究者番号：40151691
(H19 → H20：連携研究者)

吉富 賢太郎 (YOSHITOMI KENTARO)
大阪府立大学・総合教育研究機構・講師
研究者番号：10305609
(H19 → H20：連携研究者)

(3) 連携研究者