

平成 22 年 4 月 26 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006 ~ 2009

課題番号：18540045

研究課題名 (和文) アファイン代数多様体の構造と線形化問題

研究課題名 (英文) The structure of affine algebraic varieties and the Linearization Problem

研究代表者

増田 佳代 (MASUDA KAYO)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：40280416

研究成果の概要 (和文) : アファイン代数多様体上の代数群の作用, 特に加法群の作用に着目して, アファイン代数多様体の構造について研究をおこなった. その結果, アファイン擬平面をはじめとする代数曲面の構造が明らかとなった. また, 加法群の作用を通して, アファイン代数幾何学における 3 つの未解決の問題—線形化問題, Cancellation 問題, 埋め込み問題—が密接に関連していることが明らかとなった. またさらに, 3 次元以上の高次元アファイン代数多様体についてもいくつかの場合に, その構造を解明した.

研究成果の概要 (英文) : We studied the structure of affine algebraic varieties from the viewpoint of the actions of algebraic groups, especially the additive group. We gave a description of the structure of the affine surfaces of some type including the affine pseudo-plane. We show that there exists a close relationship among the big three open problems -- the Linearization Problem, Cancellation Problem, and the Embedding Problem-- through the action of the additive group. Further, we gave a characterization of the affine space of higher dimension in some cases by the algebraic actions.

交付決定額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,200,000	0	1,200,000
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,400,000	660,000	4,060,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：加法群, locally nilpotent derivation, アファイン空間, トーラス群, 埋め込み

## 1. 研究開始当初の背景

複素アファイン空間  $A^n$  は, 代数幾何学における最も基本的かつ重要な空間であるにもかかわらず, その代数幾何学的特徴づけについては, 高次元の場合はほとんど知られてい

なかった. 具体的には, 次の 3 つの問題が未解決であった.

## (1) 線形化問題

$n > 2$  とする.  $n$  次元アファイン空間上の reductive な可換群の代数的作用は, 線形な

作用と同値であるか？

## (2) Cancellation 問題

$n > 2$  とする. アファイン代数多様体  $X$  について  $X \times A^1$  が  $A^{n+1}$  と同型ならば,  $X$  は  $A^n$  と同型であるか？

## (3) 埋め込み問題

$A^m$  の  $A^n$  への埋め込みは standard な埋め込みと同値であるか？

## 2. 研究の目的

代数群の作用を用いた, 高次元アファイン空間の特徴づけを目指した. 具体的には, 上記 3 問題について次の点の解明を目的とした.

(1)  $n=3$ ,  $G$  が有限巡回群のときの線形化問題の解決.

(2)  $n=3$  のときの Cancellation 問題の解決.

(3)  $A^4$  上のトーラス群の作用についての解明  
これは  $A^1$  の  $A^3$  への埋め込み問題と密接に関係している.

## 3. 研究の方法

代数群の作用を調べることにより, アファイン代数多様体の構造を研究した. これまで, トーラス群の作用については多くの研究があったが, 加法群の作用については, あまり研究されていなかった. 加法群の作用に着目することによりアファイン代数多様体, 特にアファイン空間の構造を研究した. アファイン空間上の加法群の作用は, 多項式環上の locally nilpotent derivation と同値である. さらに, 有限群の作用と可換な加法群の作用を調べることにより, 有限群の作用による algebraic quotient の構造について研究した.

## 4. 研究成果

研究の目的であった上記 2 の 3 つの問題について, 全面的な解決は得られなかったが, 部分的な解決が得られた. 具体的には, 次の成果が得られた.

(1) アファイン平面に大変近い構造をもつアファイン擬平面について, その上のトーラス群の作用および加法群の作用を調べることにより, その構造を明らかにした. 得られた成果は論文 (次の項目の 12) において発表した. アファイン擬平面は, noncancellation property をもつ曲面であり, その構造が解明されたことの意義は大きいと考える.

(2) アファイン代数多様体  $X$  に代数群  $G$  が作用しているとき,  $G$  の作用と可換な  $X$  の自己準同型  $\phi$  が与えられたとする. このとき,  $\phi$  は,  $X$  の座標環の  $G$  による不変式環の自己準同型を誘導するが, これが自己同型であるとき,  $\phi$  は  $X$  上の自己同型であるかについて研究し,  $G$  が unipotent, かつ  $X$  が factorial ならば,  $X$  上の自己準同型  $\phi$  は実は同型写像

であることを示した. 成果は論文 (次の項目の 8) に発表した. これは, Jacobian 問題の同変版は, 群  $G$  がユニポテント群ならば不変式環の自己準同型に帰着されるということを示している. 自己準同型について, このような視点からの研究はこれまであまりされていないので, 意義がある.

(3) アファイン曲面上の  $A^1$ -fibration の構造について Makar-Limanov 不変量を用いて決定した. これは, R. V. Gurjar, P. Russell との共同研究によって得られた成果である. 結果は論文 (次の項目 5) で発表した. この論文の結果は, アファイン代数幾何学研究者の他の論文にもしばしば引用されている.

(4) 線形化問題, Cancellation 問題, 埋め込み問題はすべて, 多項式環上のある条件を満たす locally nilpotent derivation の族によって記述できることを示した. 結果は論文 (次の項目 2) において発表した. これによって, アファイン代数幾何における加法群の作用 (locally nilpotent derivation) の重要性がより明確となった. また, これら 3 問題について, 部分的に肯定的な答えが得られた.

(5)  $B$  を normal affine domain,  $A$  をその部分環で,  $B$  は  $A$  上有限であるとする. このとき,  $A$  上の locally nilpotent derivation は,  $A$  の商体  $K$ , さらに  $B$  の商体  $L$  上の locally nilpotent derivation  $\Delta$  に lift する.  $A$  が, 特に有限群  $G$  による  $B$  の不変式環である場合に,  $\Delta$  が  $B$  上の derivation となるための  $G$  の作用についての条件を求めた. 成果は論文 (次の項目 1) において発表した. 一般に, reductive 群の作用と可換な加法群の作用を考えることにより, 高次元の場合でもアファイン空間の特徴づけが得られることが示された. 3次元のアファイン代数多様体上の  $G$  可換な加法群の作用を調べることにより, 3次元のアファイン空間の特徴づけ, さらには線形化問題, Cancellation 問題などの解決につながるものと期待される.

この研究によって得られた成果が, アファイン代数幾何学における, いまだ未解決の 3 問題—線形化問題, Cancellation 問題, 埋め込み問題—の解決への手がかりとなることが, 期待される.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

1. Lifting of the additive group scheme actions, K. Masuda, M. Miyanishi, Tohoku Math. J. 61 (2009), 267—285. 査読有

2. Homogeneous nilpotent derivations having slices and embeddings of affine spaces, K. Masuda, J. Algebra 321 (2009), 1719—1733. 査読有
3. Additive group scheme actions on integral schemes defined over discrete valuation rings, M. Miyanishi, J. Algebra 322 (2009), 3331—3344. 査読有
4. Smoothness of the images of members of a linear system under an endomorphism of the affine plane, P. Cassou-Nogues, M. Miyanishi, J. Pure Appl. Algebra 213 (2009), 711—723. 査読有
5. Affine lines on affine surfaces and the Makar-Limanov invariant, R.V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi, P. Russell, Canad. J. Math. 61 (2008), 109—139. 査読有
6. The Jacobian problem for singular surfaces, R.V. Gurjar, M. Miyanishi, J. Math. Kyoto Univ. 48 (2008), 757—764. 査読有
7. Ga-actions and completions, M. Miyanishi, J. Algebra 319 (2008), 2845—2854. 査読有
8. G-endomorphisms of affine G-varieties which induce automorphisms of the invariant subrings of the coordinate rings, K. Masuda, J. Algebra 307 (2007), 97—105. 査読有
9. Torus actions and kernels of locally nilpotent derivations with slices, in: Affine Algebraic Geometry in honor of Professor Masayoshi Miyanishi, K. Masuda, Osaka University Press 2007, 295—305. 査読有
10. Q-factorial subalgebras of a polynomial ring, M. Miyanishi, Acta Math. Vietnam 32 (2007), 113—122. 査読有
11. Recent developments in affine algebraic geometry: from the personal viewpoint of the author, in: Affine Algebraic Geometry in honor of Professor Masayoshi Miyanishi, M. Miyanishi, Osaka University Press 2007, 307—378. 査読有
12. Affine pseudo-planes with torus actions, K. Masuda, M. Miyanishi, Transformation Groups 11 (2006), 249—267. 査読有
13. A geometric approach to the Jacobian conjecture in dimension two, M. Miyanishi, J. Algebra 304 (2006), 1014—1025. 査読有

[学会発表] (計 20 件)

1. “Equivariant vector fields and invariant theory”, K. Masuda, 第5回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学大阪梅田キャンパス, 2010年3月4日.
2. “Vector fields and invariant theory I, II, III”, K. Masuda, M. Miyanishi, Miniworkshop of Algebra, 国立台湾大学(台

湾), 2010年1月20日.

3. “Singularities of normal affine surfaces with vanishing homologies”, M. Miyanishi, 東北復旦合同代数幾何学研究集会, 東北大学, 2009年11月24日.
4. “Generalized Jacobian problem for algebraic surfaces like the affine plane”, M. Miyanishi, Conference on Automorphisms of Affine Spaces, Radboud University (Holland), 2009年7月6日.
5. “Homogeneous locally nilpotent derivations and embeddings of affine spaces”, K. Masuda, Conference on Affine Algebraic Geometry, McGill University (Canada), 2009年6月1日.
6. “Characteristic p phenomena in affine geometry”, M. Miyanishi, Conference on Affine Algebraic Geometry, McGill University (Canada), 2009年6月1日.
7. “Homogeneous locally nilpotent derivations and embeddings of affine spaces”, K. Masuda, 第3回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学大阪梅田キャンパス, 2009年3月17日.
8. “Lifting of the additive group scheme actions”, K. Masuda, Conference on Affine Algebraic Geometry, Bangalore(India), 2008年12月24日.
9. “Additive group scheme actions on integral domains defined over discrete valuation rings”, M. Miyanishi, Conference on Affine Algebraic Geometry, Bangalore(India), 2008年12月24日.
10. “Lifting of locally nilpotent derivations under finite homomorphisms”, K. Masuda, 第2回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学大阪梅田キャンパス, 2008年9月5日.
11. “Geometry of kernels of locally nilpotent derivations on a polynomial ring having slices”, K. Masuda, アメリカ数学会 Western section 特別セッション, Albuquerque (USA), 2007年10月15日.
12. “Ga-actions and completions”, M. Miyanishi, アメリカ数学会 Western section 特別セッション, Albuquerque (USA), 2007年10月15日.
13. “Geometry of open algebraic surfaces”, M. Miyanishi, Workshop “Affine Algebraic Geometry”, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (Germany), 2007年1月10日.
14. “Torus actions and triangular derivations with slices”, K. Masuda, Workshop “Polynomial automorphisms and related topics”, Institute of Mathematics, Hanoi (Vietnam), 2006年10月15日.

15. “Pure subalgebras of a polynomial ring and related topics”, M. Miyanishi, Workshop “Polynomial automorphisms and related topics”, Institute of Mathematics, Hanoi (Vietnam), 2006 年 10 月 15 日.

16. “G-endomorphisms of G-varieties with automorphisms of the quotients”, K. Masuda, Affine Algebraic Geometry Conference, Bedlewo (Poland), 2006 年 7 月 15 日.

[その他]

ホームページ等

<http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~kayo>

<http://www10.plala.or.jp/masamiyanishi/miya/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

増田 佳代 (MASUDA KAYO)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：40280416

### (2) 研究分担者

宮西 正宜 (MIYANISHI MASAYOSHI)

関西学院大学・数理科学研究センター・

客員研究員

研究者番号：80025311