
研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540053

研究課題名(和文) 代数幾何学的方法によるベクトル値ヤコビ形式の研究

研究課題名(英文) A study of vector valued Jacobi forms by a method of algebraic geometry

研究代表者

対馬 龍司 (TSUSHIMA RYUJI)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：20118764

研究成果の概要：

2 次の重さ k の歪正則ヤコビ形式の次元を計算した。これは、以前に 2 次の正則ヤコビ形式の次元を計算した結果を拡張したものである。また、ベクトル値の場合にも歪正則ヤコビ形式の次元の計算に必要な、リーマン・ロッホの公式を計算した。これは、未だコホモロジー群の消滅定理を証明していないので、次元公式にはなっていないが、その計算のためには必要なもので、なおかつ次元公式を予想するためには十分なものである。

この結果に伊吹山氏の得た結果を応用すると、重さ半整数のジーゲル保型形式の空間の、プラス空間と呼ばれる部分空間の次元が判る(ベクトル値の場合は予想である)。以前に得た、重さ半整数のジーゲル保型形式の次元公式

Ryuji Tsushima, Dimension formula for the spaces of Siegel cusp forms of half-integral weight and degree two, *Comment. Math. Univ. St. Paul*, vol. 52, 69–115, 2003

により、それらの空間を明示的に構成出来たが、この結果によってプラス空間も明示的に求めることが出来た(林田氏のコンピュータ計算による)。斉藤・黒川の保型形式の持ち上げ理論は、プラス空間から 1 次上のヤコビ形式の空間への同型を経由して構成される。これによって 2 次から 3 次へのジーゲル保型形式持ち上げ理論が完成したことになる。

1970年代に志村五郎氏は 1 変数の場合に、重さ整数の保型形式から重さ半整数の保型形式の対応、今日において志村対応と呼ばれている対応を発見した。

Goro Shimura, On modular forms of half-integral weight, *Ann. of Math.*, vol. 97, 440–481, 1973

この、志村対応の高次元版を考えようとすることは自然な発想であるが、30年近く経った最近に至るまでその端緒は全く掴めなかった。志村対応は全射ではなく重さ半整数の保型形式の空間の部分空間への対応であるので、この部分空間に当たる(と想定される)プラス空間の次元を知ることが重要である。また高次元の場合、志村対応は一般にベクトル値保型形式からベクトル値保型形式への対応であるので、一般化してベクトル値保型形式の場合を研究することが絶対的に必要である。この消滅定理が成り立つと仮定して、今回得られた 2 次で重さ整数のジーゲル保型形式の空間の次元とヤコビ形式の空間の次元を比較すると、重さ整数のジーゲル保型形式の空間に対応する(と想定される)プラス空間が分かり、それらの次元が完全に一致することが分かっている(伊吹山知義氏による)。

Tomoyoshi Ibukiyama, A conjecture on a Shimura type correspondence for Siegel modular forms, and Harder's conjecture on congruences, *Modular Forms on Schiermonnikoog*, 107–144,

Cambridge Univ. Press, 2008

これにより、志村対応の2次の場合の存在が予想されるに至った。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,300,000	0	1,300,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
総計	3,500,000	660,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何学、保型関数論、ジーゲル保型形式、ヤコビ形式、佐武コンパクト化、リーマン・ロッホの公式

1. 研究開始当初の背景

近年、保型形式の研究において、ヤコビ形式の研究が重要であることが認識された。その最初の場合として、1次の場合がドイツのアイヒラーによって詳細に研究され、

Martin Eichler, Don Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Progress in Mathematics, vol. 55, Birkhauser, 1985, 148頁

また保型形式との関連がドイツのコーネンによって明らかにされ、志村対応との関連が示された。

Winfried Kohnen, Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$, Math. Ann., vol. 248, 249-266, 1980

高次の場合にも同様の関係が成り立つことは予想されることであるが、高次の場合のヤコビ形式については、次の様な1次の場合と同様に示される一般論は知られていたが、

Claus Ziegler, Jacobi forms of higher degree, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, vol. 59, 191-224, 1989

Joachim Dulinsky, A decomposition theorem for Jacobi forms, Math. Ann., vol. 303,

473-498, 1995

具体的な事実については、本研究の代表者が結果を出すまでは、全世界において何の結果も知られていなかった。

対馬龍司, On the dimension formula for the spaces of Jacobi forms of degree two, 数理解析研究所講究録, vol. 1103, 96-110, 1999

2. 研究の目的

本研究の目的は高次の場合にヤコビ形式を研究することであるが、高次の場合に1次の場合ほどの詳細な結果を望むことは出来ない。そこで、少なくともヤコビ形式の空間の次元を知ること、それも高次の場合の志村対応はベクトル値ジーゲル保型形式同士の対応になるので、ベクトル値ヤコビ形式の空間の次元を知ることが重要となる。

3. 研究の方法

ヤコビ形式の空間次元を計算する方法は、跡公式による方法が知られていたが、本研究の代表者が使った方法はリーマン・ロッホの公式を使う幾何学的なものである。

ヤコビ形式は或る種のベクトル値保型形式に対応し、この保型形式は或る正則ベクトル束の正則切断と同一視される。この正則ベクトル束は、重さ半整数のジーゲル保型形式に対応する正則ベクトル束と、或る平坦なベクトル束の直積であるが、これらのベクトル束は、指数 m のヤコビ形式に対応する場合には、レベルが $4m$ の倍数であるジーゲル空間の非特異コンパクト化(佐武コンパクト化)へ延長可能である。このベクトル束に関するリーマン・ロッホの公式を応用して次元を計算する。

4. 研究成果

まず、本研究の代表者は2次のスカラー値の場合にヤコビ形式の次元を計算した。この成果を利用して、林田秀一氏はコンピュータを使ってスカラー値のヤコビ形式の生成元を見付けた。

Tomoyoshi Ibukiyama, Shuichi Hayashida, Siegel modular forms of half integral weight and a lifting conjecture, 数理解析研究所講究録, vol. 1173, 98-112, 2000

次に、ベクトル値の場合を消滅定理を除いて計算した。更に、以上の結果をドイツのスコルツパおよび荒川恒男氏によって定義された歪正則ヤコビ形式

Nils-Peter Skoruppa, Developments in the theory of Jacobi forms, Internat. Conf. Automorphic Functions and their Applications, 167-185, USSR Academy of Science, 1990

Tsuneo Arakawa, Jacobi Eisenstein series and a basis problem for Jacobi forms, Comment. Math. Univ. St. Paul, vol. 43, 181-216, 1994

の場合に拡張した。

以上の結果を基に、伊吹山知義氏は2次の場合の志村対応の存在を明確な形で予想することになった。また、伊吹山氏はその予想を何通りかのジーゲル保型形式が構成されている場合について確認している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

① 後藤四郎、西田康二、大関一秀、Sally modules of rank one, Michigan Math. J., vol. 57, 359-381, 2008, 査読あり

② 後藤四郎、早坂太、高橋亮、On vanishing of certain Ext modules, J. Math. Soc. Japan, vol. 60, 1045-1064, 2008, 査読あり

③ 後藤四郎、西田康二、大関一秀、The structure of Sally modules of rank one, Math. Res. Lett., vol. 15, 881-892, 2008, 査読あり

④ 後藤四郎、William Heinzer, Mee-Kyoung Kim, The leading ideal of a complete intersection of height two in a 2-dimensional regular local ring, Comm. Algebra, vol. 36, 1901-1910, 2008, 査読有り

⑤ 後藤四郎、木村了、松岡直之、Quasi-socle ideal in Gorenstein numerical semigroup rings, J. Algebra, vol. 320, 276-293, 2008, 査読有り

⑥ 後藤四郎、高橋亮、松岡直之、Quasi-socle ideals in a Gorenstein local rings, J. Pure Appl. Algebra, vol. 212, 969-980, 2008, 査読有り

⑦ 後藤四郎、William Heinzer, Mee-Kyoung Kim, The leading ideal of a complete intersection of height two, II, J. Algebra, vol. 312, 709-732, 2007, 査読有り

⑧ 後藤四郎、吉田健一、Buchsbaum homogeneous algebras with minimal multiplicity, J. Pure Appl. Algebra, vol. 210, 735-749, 2007, 査読有り

⑨ 後藤四郎、William Heinzer, Mee-Kyoung Kim, The leading ideal of a complete intersection of height two, J. Algebra, vol. 298, 238-247, 2006, 査読有り

⑩ 後藤四郎、高山幸秀、Stanley-Reisner ideals whose powers have finite length cohomologies, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 135, 2355-2364, 2007, 査読有り

⑪ 後藤英樹、Iwasawa invariants on non-cyclotomic \mathbb{Z}_p -extensions of CM fields, Proc. Japan Acad., vol. 82, 152-154, 2006, 査読あり

[学会発表] (計 6 件)

①後藤四郎、松岡直之、高橋亮、Quasi-socle ideals in Gorenstein local rings, 日本数学会、2007年9月23日、東北大学

②後藤四郎、木村了、松岡直之、Quasi-socle ideals in Gorenstein numerical semi group rings, 日本数学会、2008年3月26日、近畿大学

③後藤四郎、木村了、松岡直之、Quasi-socle ideals in local rings with Gorenstein tangent cones, 日本数学会、2008年3月26日、近畿大学

④後藤四郎、西田康二、大関一秀、the structure of sally modules of rank one, 日本数学会、2008年3月26日、近畿大学

⑤後藤四郎、大関一秀、Sally modules of rank one – non Cohen-Macaulay cases, 日本数学会、2009年3月29日、東京大学

⑥後藤四郎、櫻井秀人、あるネーター局所環の擬ソークイデアルについて、日本数学会、2009年3月29日、東京大学

[図書] (計1件)

①対馬龍司、線形代数学講義、共立出版、2007
253頁

6. 研究組織

(1) 研究代表者

対馬 龍司 (TSUSHIMA RYUJI)
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：20118764

(2) 研究分担者

後藤 四郎 (GOTO SHIRO)
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：50060091
後藤 英樹 (GOTO HIDEKI)
明治大学・理工学部・助手
研究者番号：70409449

(3) 連携研究者

なし