

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2009

課題番号：18540055

研究課題名（和文） アーベル多様体上の算術的問題の研究

研究課題名（英文） Studies on arithmetic problems on abelian varieties

研究代表者

青木 昇（AOKI NOBORU）

立教大学・理学部・教授

研究者番号：30183130

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ゼータ関数、フェルマー曲線、ヤコビ和、ガウス和、 p 進ガンマ関数

1. 研究計画の概要

代数体や有限体上で定義されたアーベル多様体、特に代数曲線のヤコビ多様体上の算術的な問題について研究する。アーベル多様体として特に虚数乗法を持つものを考え、そのモデル・ヴェイユ群の有限部分の構造を研究する。また、代数曲線として有限体上のフェルマー曲線を取り上げ、その合同ゼータ関数の具体的な形を研究する。

2. 研究の進捗状況

虚数乗法を持つ代数体上のアーベル多様体のモデル・ヴェイユ群の有限部分の構造については、定義体に関するある条件付ではあるが、それまで知られていたシルババーグの評価を大きく改良する結果が得られた。また、有限体上で定義されたフェルマー曲線を取り上げて、その合同ゼータ関数について研究を行ってきた。その合同ゼータ関数はヤコビ和を用いて表される。その最も扱いやすい場合である超特異な場合について中心に研究を進めた。それはヤコビ和の言葉では、ピュアなヤコビ和の決定問題である。これまでに知られている結果を使うことにより、組み合わせ論的な考察でヤコビ和がピュアになるための必要条件を具体的に書き下した。しかしその場合であっても、ヤコビ和を具体的に決定することは必ずしも容易ではない。そこで、その特別な場合としてフェルマー曲線の次数が二つ以下の素数の積であるとき、超特異な商曲線の合同ゼータ関数の形を研究した。そのために、対応するヤコビ和の形を決定する必要がある。ヤコビ和はガウス和の積として表されるので、ガウス和の明示

的な形を求める研究を行った。その方法として、本研究で採用したのは森田の p 進ガンマ関数である。グロスとコブリッツの研究、およびそれを精密化したコールマンの研究により、ガウス和を p 進ガンマ関数の積で表すことが出来るという事実と、フェルマー曲線の商曲線が超特異である場合には、対応する p 進ガンマ関数の積が具体的に計算されるという事実をもとに、ヤコビ和の形を、従って、合同ゼータ関数の形を具体的に決定することに成功した。フェルマー曲線の次数が一般の場合も原理的には同じ方法が適用可能であることが判るが、ヤコビ和の符号の決定問題が残されている。これは、最も簡単な場合でもガウス和の符号決定問題であり、まだ解明されるべき課題が多くある。

3. 現在までの達成度

③やや遅れている。

虚数乗法を持つ代数体上のアーベル多様体のモデル・ヴェイユ群の有限部分の構造については、ある意味でほぼベストな結果が得られた。また、ピュアなヤコビ和の具体的な形の決定問題については符号を除いて決定可能な段階まで到達できた。しかし、符号決定問題自身は、最も単純な場合においてさえガウスが困難を極めた問題と密接な関係があることを見出した。従って、一般の場合にはその解決にはまだ少なからぬ困難があると推測される。

4. 今後の研究の推進方策

ピュアなヤコビ和の符号決定のために、ガウス和の場合の証明を再度点検し、それを一般化する方策を検討する。更に、近年、特別

な場合に、円分体のある部分体における素イデアルの分解の様子と符号決定問題の関係を示唆する研究がなされており、それを一般化することは重要な問題であると思われる。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

①Noboru Aoki, On supersingular cyclic quotients of Fermat curves, *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli*, 57 巻, 2008 年, p.65-p.90, 査読有

②Noboru Aoki, On the zeta function of some cyclic quotients of Fermat curves, *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli*, 57 巻, 2008 年, p.163-p.185, 査読有

③Noboru Aoki, On the solvability of a certain Diophantine equation with a parity condition, *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli*, 56 巻, 2007 年, p.71-p.96, 査読有

④Akio Fujii, On the Faray series and the Hecke L-functions, *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli*, 56 巻, 2007 年, p.97-p.162, 査読有

⑤Noboru Aoki, Torsion points on CM abelian varieties, *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli*, 55 巻, 2006 年, p.207-p.229, 査読有