

平成 22 年 5 月 21 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2009

課題番号：18540055

研究課題名（和文） アーベル多様体上の算術的問題の研究

研究課題名（英文） Studies on arithmetic problems on abelian varieties

研究代表者

青木 昇 (AOKI NOBORU)

立教大学・理学部・教授

研究者番号：30183130

研究成果の概要（和文）：代数体上で定義されるアーベル多様体に関するいくつかの算術的問題について研究を行った。その結果、虚数乗法を持つアーベル多様体の有限位数の有理点のなす群の構造についてシルヴァーバーグの評価式の精密化を得ることに成功した。また、有限体上のフェルマー曲線のヤコビ多様体の合同ゼータ関数が純ガウス和で表されるための条件を研究し、ある条件化で合同ゼータ関数の明示的な形を決定することに成功した。更に、リーマンゼータ関数の臨界線上の偏角の分布の研究を行い、新しい評価式を得た。

研究成果の概要（英文）：We studied some arithmetic problems on abelian varieties defined over number fields. As a result, we obtained a refinement of Silverberg's estimates on the structure of the group of rational points of finite order on abelian varieties with complex multiplication. We also studied the conditions for the congruent zeta function of the Jacobian varieties of Fermat curves over finite fields to be expressed by pure Gauss sums, and succeeded in determining explicit forms of the zeta functions under certain conditions. Further, we studied the distribution of the argument of the Riemann zeta function on the critical line, and obtained some new estimating formula.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	2,800,000	510,000	3,310,000

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論、アーベル多様体

## 1. 研究開始当初の背景

本研究の開始当初において、研究テーマとして代数体上もしくは有限体上のアーベル

多様体の算術的問題について研究することを出発点においた。具体的な問題としては次の4点であった。

(1) 代数体上で定義された、虚数乗法をもつ

アーベル多様体のモデル・ヴェイユ群の振れ部分群の構造の研究。

(2) 代数体のL関数の特殊値に関するグロス予想・テイト予想およびその精密化。

(3) 有限体上のアーベル多様体の合同ゼータ関数についての研究。

(4) アーベル多様体の代数的サイクルに関する研究。

(1) については、専攻する研究として、まずメイザーによる有理数体上の楕円曲線のモデル・ヴェイユ群の振れ部分群の構造を決定するという重要な結果があり、それを一般化することが大きな問題としてあった。一般のアーベル多様体については、それは現在でも未解決であるが、後にシルヴァーバーグは、任意の代数体上で定義される一般次元のCM型アーベル多様体に対してモデル・ヴェイユ群の振れ部分群の大きさを評価することに成功した。しかしながら、その評価式は最良値からは遠く、極めて粗い評価でしかなかった。そのため、シルヴァーバーグの評価式を精密化する問題が自然に起こってきた。また、同時に2次元の分解型CMアーベル多様体については先行する結果として中村の論文があり、それとシルヴァーバーグ理論との整合性も吟味することも自然な問題として考えるべきである状況であった。

(2) について。グロス予想は楕円曲線に対するバーチ・スイナートンダイヤー予想の群環版として代数体および有限体上の1変数代数関数体に対して1980年代後半に提出された予想である。いくつかの場合についてグロス予想が証明されていたが、現在もまだ完全には証明されていない状況である。その後1990年代の後半になって、テイトによるその精密化が巡回拡大の場合に提案された。研究代表者は2004年の論文でその予想を代数体の場合に解決した。更に、研究代表者はK.-S.タン氏およびJ.リー氏とともにテイトを予想の一般化および精密化を研究し、ひとつの予想を定式化することに成功していた。

(3) については、有限体上のフェルマー曲線のヤコビ多様体の合同ゼータ関数はヤコビの和で書けるということは古典的な事実として有名であるが、その形を明示的な形で書き下すことは容易ではない。また、近年の暗号理論・符号理論においてその種の合同ゼータ関数を用いること研究がなされるようになり、その重要性が高まってきている。こうした背景の中、フェルマー曲線のヤコビ多様体の合同ゼータ関数を具体的に書き下すことが出来る場合の研究を開始した。

(4) については、代数曲面においてはホッジ予想が正しいことは知られているが、具体的な代数的サイクルを構成することは一般には容易ではない。そこで本研究ではこれ

まで申請者によって得られた、フェルマー多様体上の新しいタイプの代数的サイクルを更に深く調べ、ホッジ予想がまだ証明できていない場合について、対応する代数的サイクルを探し、その結果をフェルマー曲線のヤコビ多様体のモデル・ヴェイユ群の研究に結びつける研究を開始した。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は次の通りである。

上記(1)について。

この問題に関しては、シルヴァーバーグの評価式を精密化することを目的とした。シルヴァーバーグの評価式は、一般のCM型アーベル多様体に適用可能な優れたものであり、現在でもそれを越える一般的な評価式は得られていない。しかし、一般的である分、評価式としてはかなり粗いものでしかなく、楕円曲線の場合ですら最良値とは程遠いものである。そこで、本研究では、多少の一般性を犠牲にしても適用可能な範囲において、シルヴァーバーグの評価式より精密な評価式を得ることを目指した。これは、強振れ部分群予想を指示する結果を与えるものとして考えられると言う意味においても研究価値のある問題であると思われる。

上記(2)について。

グロス予想は、代数体あるいは有限体上の1変数代数関数体のL関数の0での特殊値から得られる、シュテッケルベルガー元と呼ばれるある群環の元とグロスのレギュレーターと呼ばれる元の間の関係式を与える予想である。これは既述のバーチ・スイナートンダイヤー予想や代数体の類数公式などの、整数論における基本的な関係式の類似と見られる。従って、グロス予想、あるいはその精密化であるテイト予想の証明に成功すれば、その他の整数論における基本的な問題群に重要な知見を与えるはずであり、として位置づけられるはずである。しかしながら、現在でもそれは成功しておらず、それは現段階での問題の定式化が不十分であるということの意味していることが想定される。そこで、これまでに知られている結果を統合し、それらの場合を統一的に扱う理論の構築が(2)の研究の目的である。

上記(3)について。

有限体上のフェルマー曲線のヤコビ多様体の合同ゼータ関数の研究は、一般論としては古典的な問題であり、多くのことが知られているが、この研究ではフェルマー曲線のヤコビ多様体に限定して、その合同ゼータ関数が純ヤコビ和で書ける場合の決定を目指した。そのためにヤコビ和の元となるガウス和の研究が必要になるが、特に純ガウス和を決

定することが重要な問題であり、(3)の研究の目的であった。

上記(4)について。

この問題は(3)と深く関わっているが、現在でも一般論は出来上がっていない。そこで、フェルマー型のアーベル多様体上の代数的サイクルについて研究を集中することにした。そのためにはフェルマー多様体と呼ばれる超曲面についてホッジ予想を研究することが重要である。従って、(4)の研究の目的はフェルマー多様体上の代数的サイクルの研究であると言える。

### 3. 研究の方法

(1)について。

まず、シルヴァーバーグの方法の検証から始めた。CM型のアーベル多様体の振れ部分群へのガロア群の作用について調べるには、志村・谷山の虚数乗法論を使うことが標準的な方法であり、シルヴァーバーグの方法もそれを使うものである。そこでの適用方法を綿密に検討し、改良の余地のある点を研究するところから出発した。

(2)について。

グロス予想の精密化については既に研究代表者とタン、リーによる共同研究により予想の形が出来ていたのをそれを証明することを目指した。また、その更なる一般化として、エタールコホモロジーを用いた定式化を探求し、より一般的な見地からの研究を目的とした。また、K理論を用いたバーンズによる新しい定式化も研究され始め、それとの関連性を追及することが大きな課題であった。更に、共同研究者の藤井に解析的整数論からの知見を得、それを特に(3)の研究と関連させることを目指した。

(3)について。

有限体上のフェルマー曲線のヤコビ多様体の合同ゼータ関数を調べるためにはヤコビ和およびガウス和を研究することが必要である。そこで本研究では、純ヤコビ和および純ガウス和と呼ばれる特別なものに限って研究をし、どのような場合にヤコビ和およびガウス和が純であるかという問題を設定し、その場合のフェルマー曲線の次数と標数との関係を調べることにした。

(4)について。

特別な場合としてのフェルマー多様体の場合でも一般論としては代数的サイクルの研究は完成していないので、更に特別な場合として、曲面の場合に研究をもう一度見直すことから始めた。フェルマー曲面に載っている代数曲線を探す作業を始め、一般次元における代数的サイクルの研究に足がかりを求

めた。

### 4. 研究成果

(1)について。

この研究の成果は論文⑧として発表した。そこにおいて、虚数乗法を持つアーベル多様体とその自己準同環が定義体上の定義されていない場合には、シルヴァーマンの評価式より精密な評価式を得ることに成功した。その評価式はある条件の下では最良のものであることも証明することに成功した。これは先行する中村の結果を一般化したものともなっている。更に、特別な場合として有理数体上の場合を考えると、これまで知られている結果を改良する評価式が得られる。今後の課題としてまず研究すべき点は、定義体に関する条件をはずし、一般の代数体上での評価式を求めることであろう。

(2)について。

この研究については大きな成果を得ることが出来なかったが、その成果の一部については論文⑨において発表した。その中で述べている予想は独立にバーンズにより同じ形で定式化された。バーンズはこれまで知られている結果を合わせて多くの場合にその予想を証明しているが、本研究で中心として扱っている代数体の場合は依然として未解決である。共同研究者の藤井によるリーマンゼータ関数の値分布についての研究はグロス予想に対して何らかの意味を与えるものとして期待できるが、それについては今後の研究課題である。

(3)について。

この研究の成果については、論文④⑤⑥として発表した。まず、⑥において純ガウス和を決定する上で必要となるある種のディオファントス問題を解決することに成功した。続いて、その結果を用いて、④⑤において、フェルマー曲線の巡回群による商曲線として得られる代数曲線の合同ゼータ関数を調べ、それらがいつ純ヤコビ和を用いて表されるかについて研究を行った。この研究を更に進めることにより、純ヤコビ和で表される場合を完全に決定する道筋が見えてきた。

(4)について。

この研究の成果については論文①として発表予定である(既に掲載決定済み)。その論文の中で、共著者の塩田とフェルマー曲線上の代数的サイクルの研究を行い、標準型と呼ばれるホッジサイクルに対応する代数曲線を調べ、その非自明性を証明する系統的な方法を見つけることに成功した。更に、塩田の帰納的構造を使う別証明を現在研究中であり、今後の研究成果が期待できる方向が見えてきた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

① N. Aoki, T. Shioda, Correction and supplement to the paper ‘Generators of the Neron-Severi group of a Fermat surface’, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, 査読有, 59 巻, 2010 (掲載決定)

② A. Fujii, Oscillations, Pseudorandomness and Hecke L-functions, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, 査読有, 58 巻, 2009, 119-167.

③ A. Fujii, Oscillations, Pseudorandomness And Davenport’s formula, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, 査読有, 58 巻, 2009, 169-187.

④ N. Aoki, On the zeta function of some cyclic quotients of Fermat curves, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, 査読有, 57 巻, 2008, 163-185.

⑤ N. Aoki, On supersingular cyclic quotients of Fermat curves, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, 査読有, 57 巻 2008, 65-90.

⑥ N. Aoki, On the solvability of a certain linear Diophantine equation with a parity condition, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, 査読有, 56 巻, 2007, 71-96.

⑦ A. Fujii, On the Farray series and the Hecke L-functions, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, 査読有, 56 巻, 2007, 97-162.

⑧ N. Aoki, Torsion points on CM abelian varieties, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli 査読有, 55 巻, 2006, 207-229.

⑨ N. Aoki, J. Lee, Survey of Gross’s conjecture and its refinements, 査読無, 9 巻, 2006, 31-34.

⑩ A. Fujii, A note on the distribution of argument of the Riemann zeta function, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli 査読有, 55 巻, 2006, 135-147.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

青木 昇 (AOKI NOBORU)  
立教大学・理学部・教授

研究者番号 : 30183130

### (2) 研究分担者

藤井 昭雄 (FUJII AKIO)  
立教大学・理学部・教授  
研究者番号 : 50097226

### (3) 連携研究者

なし