様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月３１日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2006 年　～　2009 年
課題番号：１８５４００５６
研究課題名（和文）代数体の素数を法とする単数の分布

研究課題名（英文）Distribution of units of an algebraic number field modulo rational primes

研究代表者　北岡良之（KITAOKA　YOSHIYUKI）
名城大学・理工学部・教授
研究者番号：40022686

研究成果の概要（和文）：代数体の単数の分布を有理素数を法として調べた。

研究成果の概要（英文）：I studied distribution of units of an algebraic number field modulo rational primes.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,000,000	0	1,000,000
2007 年度	500,000	150,000	650,000
2008 年度	500,000	150,000	650,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総　計	2,500,000	450,000	2,950,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学（細目番号４１０１）
キーワード：整数論

１．研究開始当初の背景

整数論において代数体の類数、単数は重要な対象であるが、類数についてはディリクレの類数公式以来整数論の中心的話題として多くの研究がある。最近ではフェルマー予想の解決に直接使われたわけではないがその考え方が使われた類数に関する岩沢理論などが有名である。これに対して単数についてはいろいろなところで重要な役割を果たすが、ディリクレの単数定理として有名な定理以外には特殊な代数体に対する単数の具体的な構成法など散発的な結果があるだけである。定性的な結果も定量的な結果もないと言ってよいと思われる。それは単数についてなにが知りたいかという動機がはっきりしていなかったためといってもよく、いいかえればよく対象を観察していなかったためと言っても良い。この研究では代数体の類体論を視野にいれその不分岐拡大を調べるという観点からすれば自然に単数に関してなにがわかりたいかという問題が生ずる。この観点から前回の科研費の援助を受けて得られた

成果について説明する。その続きが今回の研究だからである。具体的には第数体 F の整イデアル A に対しその剰余類環の中で単数によって代表される剰余類の位数を調べることとなる。しかし考えるイデアル A を任意に動くとしてはよい結果は得られないのは経験的にわかっているのでまず素イデアルに制限して考えた。調べたい代数体を F とし補助の体として有理数体上ガロア拡大で F を含むものと K の同型写像 s を固定しておく。これは考える素イデアル P をフロベニウス写像を通じて s によって統制するためのものである。この時 s の多項式で単数群に作用させると有限群になるもので次数が最小のものを g(s)と定める。このとき K と s によって決まるある整数 d があり、フロベニウス対応で s に対応する素イデアル P を考えるとその剰余指数は g(p)d をわることがわかる。更に大事なのは剰余指数が限界の g(p)d に一致するものの密度が具体的に予想できる。それは数値実験データ理論的値とよく合っている。しかしその予想を証明することは困難で実 2 次体のときにチェボタレフの密度定理の解析版の誤差項に関する現在もっとも妥当と思われている精密な予想から我々の予想が従うことはわかるが、一般の代数体についてはそのチェボタレフの密度定理の精密な予想を使っても我々の予想を導くことは難しい。それは我々の予想を導くためには無限個の代数体に対するチェボタレフの密度定理の精密な予想を使わねばならずそうすると誤差項が無限に集積して本当に誤差項になっているかどうかがわからなくなってしまうのである。これはチェボタレフの密度定理以外の無限個の代数体に関する密度定理の存在を示唆していると思われる。しかし少なくとも素イデアルを考えるときは代数的枠組の構築はできた。これによって最大不分岐アーベル拡大体は標準的に拡大次数が(上の多項式 g を使って)g(p)d 次のものが存在し、それと最大不分岐アーベル拡大との違いは導手の素イデアルに強く依存するということもわかり、このことが認識できただけでも大きな成果である。

２．研究の目的

上に述べたように代数体の整数論においてイデアル、単数は最も基本的な量である。イデアルについては整数論の中心的話題の 1 つであり、古来多くの結果があるが単数については重要ではあるがよくわかっていない。たとえば有名な結果として、単数群のランクを与えるディリクレの単数定理があるが、それも単数の定性的情報を与えたり、具体的構成方法を与えるわけではない。何となく神秘のヴェールに包まれて何を単数について知りたいのかすらはっきりしない。ここでは類体論によって、整イデアルによる既約剰余類群のなかで単数で代表される類の部分群の指数がそのイデアルを導手とする最大アーベル拡大の分岐拡大の部分の拡大次数を与えるという事実を念頭において単数の分布を調べる。最大アーベル拡大の分岐拡大については具体的構成法は皆が知りたいと思っているにもかかわらずなんの手がかりもない。その拡大次数は導手であるイデアルを法とした剰余類の中で単数で代表される剰余類の個数から類体論により簡単に与えられる。ほとんどの人がそれで拡大次数がわかった気になっているが実際に具体的な場合にその値を求めようとすると単数がどれだけわかるかということになり非常に大変なことになる。そこで具体的な数値を求めるのではなくどういう挙動をするかを調べたい。まず考えるイデアル A を任意に動くとしてはよい結果は得られないのは経験的にわかっているのでまず素イ

デアルに制限して考えたのが前回科研費の補助を受けて行った研究である。今回はその続きとしてイデアルが有理素数pを代表元とする単項イデアルの場合を考える。

３．研究の方法

上に述べたように単数の分布の研究とは代数体 F を固定しその整イデアル A を考え A による整数環の既約剰余類環において単数で代表される類の個数(剰余指数とよぶ)がイデアル A を動かして考えるときどのような挙動を示すかを調べる。そのためには唯一利用可能なチェボタレフの密度定理に代表される解析的整数論の手法と代数的方法を融合させた新たな手法を開発する必要がある。この目的のため計算機実験の結果を参照しながら代数的理論の枠組みを構築し解析的整数論の手法が使えるようにする。

４．研究成果

代数的あるいは整数論的処理が必要となる。これはい前回の続きとして、次に動かすイデアルを素イデアルでなく(有理)素数 p を生成元とする単項イデアルの場合を考察した。この場合解析的処理以前の問題として今まで扱われていなかったくつかの興味ある問題を提供した。素イデアルのときと同様に調べたい代数体をFとし補助の体として有理数体上ガロア拡大でFを含むものとKの同型写像 s を固定しておく。この場合は更に s が有理数体上Kのガロア群の中心に入っていることを要請する。これは実験的にも、理論的には理論の展開がうまくいかないので致し方ないがその本質的理由は不明である。単数群を s-加群とみなして分解すると本質的にいくつかの円分体の直和になる。その円分体に対応する円分多項式などを使って、素数 p が s に対応する場合、剰余指数を円分多項式の p に於ける値の積と、単数群から p を法とする剰余類群への自然な写像の核とその核に含まれる自然な部分群との指数の商として表されることがわかる。この商の(素数 p を動かしたときの)最大公約数を k とすると k は整数論的に面白い量となっていることが次数の低い体で実際計算してみるとわかる。更に上の剰余指数の表現で分母の群指数を k で置き換えた値を剰余指数に持つ素数が正の密度を持って存在することは予想される。
この密度の数値実験による値と理論値は合っており予想は正しいはずであるが素イデアルのときと同様に解析的理由によりその証明は困難である。それは原始根に関するアルチン予想として知られているものよりもはるかに厄介であることはすぐわかる。
不変量kについては単数群をガロア加群として見た場合にその構造と密接に関係しており、それがわからないことにはkを具体的に書き下すことはできない。次数の低い体についてkを具体的に書き下すことを行ったが今までの整数論で扱われなかった新たな不変量や概念が必要となっている。
3 次アーベル拡大 F については更に詳細な研究を行い、密度を具体的に代数体 F の言葉で書き切り数値実験でそれが正しいことを確かめた。その密度を求めるために F のアーベル拡大に関する詳細な研究を行った。密度は素数に関する無限積で表されその各素数に関する因子も具体的に書ききれるが今までに知られた形ではなく無限積がいわゆる閉じた形で書き表せるかどうかは不明である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

①Y.Kitaoka, A statistical relation of roots of a polynomial in different local files II, Number Theory : Dreaming in Dreams (Series on Number Theory and Its Application Vol. 6), pp. 106-126, World Scientific, 2010. 査読有

②Y.Kitaoka, A statistical relation of roots of a polynomial in different local fields, Math. of Comp. 78(2009), 523-536. 査読有

③Y.Kitaoka, Distribution of units of an algebraic number field modulo an ideal,

Number Theory, Sailing on the sea of number theory, pp. 39-96, World Scientific (2009) 査読有

④Y.Kitaoka, Distribution of units of a cubic abelian field modulo prime numbers, J. Math. Soc. Japan, vol58, 563-584 (2006). 査読有

〔学会発表〕（計 3 件）
①北岡良之,多項式の異なる局所体での根の分布について、数理解析研解析的整数論の新しい展開、平成 20 年 10 月 28 日（数理解析研究所）

②北岡良之,多項式の異なる局所体での根達の統計的関係について博多数論小研究集会、平成 20 年 2 月 23 日（九州大学）

③北岡良之,単数の分布について、 北陸数論研究集会、平成 19 年 12 月 26 日（石川シティカレッジ）

〔図書〕（計 件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計◇件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
北岡良之
名城大学・理工学部・教授
研究者番号：40022686

(2)研究分担者
（ ）

研究者番号：

(3)連携研究者
（ ）

研究者番号：