

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540058

研究課題名 (和文) ユニポテント次元と代数多様体の構造

研究課題名 (英文) Unipotent dimension and structures of algebraic varieties

研究代表者

宮西 正宜 (MIYANISHI MASAYOSHI)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：80025311

研究成果の概要：アフィン代数多様体もつアフィン空間のファイブレーションの相対次元の最大値としてユニポテント次元の概念を導入し、アフィン代数多様体の構造を2次元および高次元の場合について解明した。その概念を応用して、ジャコビアン予想を一般化したものを一部肯定的に解決した、

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	480,000	2,980,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ユニポテント代数群・アフィン代数多様体・ファイブレーション・Jacobian 予想・不分岐射・多項式環・特異点

1. 研究開始当初の背景

(1) アフィン直線のファイブレーションや加法群の作用に関わる Makar-Limanov 次元によってアフィン代数曲面の精密な分類が盛んになっていた。研究代表者も加法群や乗法群の作用を持つホモロジー平面や \mathbb{Q} -ホモロジー平面の分類を行っていた。

(2) 研究代表者は、加法群 G_a や乗法群 G_m の作用を持つ代数曲面に関する一般化された Jacobian 予想について多くの研究成果を得ていた。

(3) このような研究が属する分野であるアフィン代数幾何学は日本・ヨーロッパ・インド・カナダ・アメリカにおいて研究が活性化

し、研究者数も順調に増加していた。

2. 研究の目的

(1) アフィン直線のファイブレーションを次元の高いアフィン空間によるファイブレーションへ、加法群の作用を次元の高いユニポテント群の作用に一般化することによって、3次元以上のアフィン代数多様体の構造を研究する。

(2) このような一般化を研究することによって、アフィン直線や加法群の場合の持つ限界が明らかにされる。この視点は、 \mathbb{C} -ファイブレーションや \mathbb{C}^* -ファイブレーションが不分岐自己準同型射で保存されるかどうかを

考察する上で重要である。

(3) Jacobian 予想の解決を図ること。

3. 研究の方法

主として次のような視点と方法に基づいて研究する。

(1) ユニポテント代数群の作用に関する商多様体と商射をモデルにして、一般のアフィン空間のファイブレーションを研究する。

(2) とくに、そのようなファイブレーションと代数多様体の特異点の性質との関連付けを探る。

(3) 常に代数群の作用に関する同変問題を考え、対象となる代数多様体の次元を下げる工夫をする。

(4) 基本群や普遍被覆空間の決定など、代数多様体の位相的構造を研究する。

4. 研究成果

3次元以上の代数多様体の構造に関わる結果も挙がっているが、多くは代数曲面に関わる結果が多い。以下、発表論文に即して研究成果を述べる。

(1) 論文①において、アフィン代数多様体上に与えられた加法群の作用が、代数多様体の有限被覆空間に拡張できるための必要十分条件を求めた。また、有限被覆が有限群 G の作用による商射になっている場合に、加法群の G -不変な作用を、具体的な G に対して決定した。これらの結果を使って、アフィン擬平面がプラトニック代数曲面 \mathbf{C}^2/G (G は有限巡回群) になるための条件を求めた。

(2) 論文②において、「商特異点でない特異点をもつ正規なアフィン代数曲面の不分岐自己準同型射は自己同型射である。」ことを証明した。証明は、 $\phi: X \rightarrow X$ がこのような代数曲面の不分岐自己準同型射だとすると、上の X に双有理な正規代数曲面 Y と有限射 $\phi: Y \rightarrow X$ が存在して、 Y は X を開集合として含み、 ϕ の X への制限が ϕ とできる。このとき、 $Y-X$ は高々巡回型の商特異点しか持たないことを証明するのがキー・ポイントである。

(3) 論文③において、離散付値環 O 上定義された相対次元 1 の多元整域 R が O 上のスキームとして加法群スキームの作用を持つとき、 R の order と index という 2 つの量をもちいて、 R の構造が完全に決定できることを示した。相対次元が 2 以上の場合がユニポテント次元が高い場合になるが、一般ファイバーがアフィン空間でも特殊ファイバーはアフィン直線によって ruled variety になっていることしか言えない。高次元の場合の難しさを如実に示している。

(4) 論文④において、 m 次元のアフィン空間 \mathbf{A}^m を n 次元のアフィン空間 \mathbf{A}^n に閉集合として埋め込んだとき、 \mathbf{A}^n のある座標系に関して埋め込まれた \mathbf{A}^m は線形部分空間になっているかという、未解決の「埋め込み問題」を考察したものである。この問題が肯定的に解けることと、お互いに可換な局所冪零導分の系 $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ が存在して slice をもつことが同値であることを証明している。局所冪零導分はアフィン代数多様体上への加法群の作用から多様体の座標環に誘導された作用を表している。

(5) 論文⑤においては、2次元の Jacobian 予想「不分岐自己準同型射 $\phi: \mathbf{A}^2 \rightarrow \mathbf{A}^2$ は自己同型射である。」において、予想が成立することと、 \mathbf{A}^2 上の直線束の一般メンバーの ϕ による像が非特異代数曲線になることが同値であることを示している。 ϕ が不分岐でなければ、一般ファイバーの像は一般には非特異にならない。非特異性の判定条件を与えるとともに、特異になる場合の解析を 2 変数の多項式環 $\mathbf{C}[x,y]$ の部分環として定義される 2 次元の正規部分環を調べることによって行おうとするものである。論文⑤は論文⑩の延長線上にあり、種々の例を調べるには Maple を用いた数式演算が欠かせない。

(6) 論文⑥においては、 R を局所冪零導分 δ をもつ幾何学的局所環、 R^\wedge をその極大イデアルによる完備化として、 δ^\wedge を δ の R^\wedge 上への自然な拡張とすると、 $R_0 = \text{Ker}(\delta)$ の R からの誘導位相による完備化が $\text{Ker}(\delta^\wedge)$ となっているかという問題を取り扱った。結果は成立せず、 δ を基礎体上の有限生成整域 R' で R をその局所環にもつようなものに延長して、 δ に付随して定まる $\text{Spec}(R')$ 上への加法群スキームの作用による商射 $\pi: \text{Spec}(R') \rightarrow B = \text{Spec}(\text{Ker} \delta)$ が重複ファイバーを持つかどうかに関わっていることが分かった。このような現象は簡約可能代数群 (reductive algebraic group) の場合に起こらず、ユニポテント群の場合にだけ起こる特殊ケースである。

(7) 論文⑦は R.V. Gurjar, 増田佳代, P. Russell が Montreal 大学, McGill 大学, Banff 国際センター (カナダ・Pacific Institute of Mathematics) で 2006 年夏に行った共同研究の成果である。アフィン代数曲面 X の Makar-Limanov 不変量 $ML(X)$ の基礎体 \mathbf{C} 上の超越次数 $\text{tr.deg } ML(X) = i$ によって、 X が ML_i -曲面であるという定義を導入する。 ML_0 -曲面がアフィン平面 \mathbf{A}^2 とよく似た振る舞いをすることを示している。また、 $f: X \rightarrow Y$ が有限射で X が ML_0 曲面ならば、 Y も ML_0 曲面になることも示してある。その他、 $i > 0$

の場合には, ML_1 -曲面は様々な rigidity をもつことも示されている.

(8) 論文⑧においては, X が非特異アフィン代数局面で $\text{Pic}(X)$ が torsion 群ならば, X がアフィン擬平面になる必要十分条件はアフィン平面から X への支配者が存在すること (同値な言い換えは, X の座標環が 2 変数の多項式環 $\mathbf{C}[x,y]$ の部分環になっていることである.) を示している. この論文は, R.V. Gurjar との 2 変数の多項式環の pure な部分環の分類に関する共同研究の一部に基づいている.

(9) 論文⑨においては, アフィン代数幾何学の中心的問題である, 消去問題, Jacobian 予想, アフィン空間の埋め込み問題, 開代数曲面論, 加法群スキームの作用, Hilbert の第 14 問題などについて, その発展過程を論じ, 将来の方向を検討している. 文献類についても十分な量がつけられている.

(10) 論文⑩においては, Jacobian 予想が \mathbf{A}^2 に対して肯定的に解けることと, 直線束の一般メンバーに対して不分岐自己準同型射によるその像が非特異になることが同値になることが示されている. 2 次元の一般化された Jacobian 予想に対しても, ある幾何学的不変量に関する条件を満たせば, この同値条件が成立することも示されている.

(11) 論文⑪においては, アフィン擬平面 X が ML_1 -曲面で, G_m の作用を持つときは, X の普遍被覆空間 \tilde{X} は \mathbf{A}^3 の超曲面 $x^r y = z^d - 1$ ($r > 1, d > 1$) に同型であることを示している. アフィン擬平面の概念は研究代表者によるものであるが, その普遍被覆空間が Danielewski 曲面と呼ばれるものになり, 消去問題などを考えるときに, 代数曲面の重要なクラスになっている.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① 増田佳代, 宮西正宜, Lifting of locally nilpotent derivations under finite homomorphism, Tohoku Mathematical Journal, 掲載決定 (2009), 査読有.
- ② R.V. Gurjar, 宮西正宜, Jacobian problem for singular surfaces, Journal of Mathematics, Kyoto University, 48 (2009), 印刷中, 査読有.
- ③ 宮西正宜, Additive group scheme actions on the integral schemes defined over discrete valuation rings, Journal

of Algebra, a special issue for Professor Paul Roberts, (2009), 印刷中. 査読有.

- ④ 増田佳代, Homogeneous locally nilpotent derivations having slices and embeddings of the affine spaces, Journal of Algebra, 321 (2009), 印刷中, 査読有.
- ⑤ Pierrette Cassou-Nogues, 宮西正宜, Smoothness of the images of the members of a linear pencil under an endomorphism of the affine plane, Journal of Pure and Applied Algebra 213 (2009), 711—723, 査読有.
- ⑥ 宮西正宜, G_a -actions and completions, Journal of Algebra, 319 (2008), 2845—2854, 査読有.
- ⑦ R.V. Gurjar, 増田佳代, 宮西正宜, P. Russell, Affine lines on affine surfaces and the Makar-Limanov invariant, Candian Journal of Mathematics 60 (2008), 109—139, 査読有.
- ⑧ 宮西正宜, \mathbf{Q} -factorial subalgebras of polynomial rings, Acta Mathematica Vietnamica, 32 (2007), 113—122, 査読有.
- ⑨ 宮西正宜, Recent developments in affine algebraic geometry, Affine Algebraic Geometry edited by T. Hibi, Osaka University Press, 2007, 307--378, 査読有.
- ⑩ 宮西正宜, A geometric approach to the Jacobian conjecture in dimension two, Journal of Algebra 304 (2006), 1014—1025, 査読有.
- ⑪ 増田佳代, 宮西正宜, Affine pseudo-planes with torus actions, Transformation Groups, 11 (2006), 249—267, 査読有.

[学会発表] (計 7 件)

- ① 宮西正宜, Additive group scheme actions on integral domains defined over discrete valuation rings, Conference on Affine Algebraic Geometry, Bangalore, India, December 23, 2008.
- ② 宮西正宜, Jacobian Problem for singular surfaces, Affine geometry, Number theory and Singularities, Pi60, June 17, 2008, CIEM, Castro Urdiales, Spain.
- ③ 宮西正宜, G_a -actions and completions, Affine Algebraic Geometry, Special session of the Western section of American Mathematical Society, October 13, 2007, New Mexico University, Albuquerque, USA.

- ④ 宮西正宜, Geometry of open algebraic surfaces, Workshop on Affine Algebraic Geometry, January 9, 2007, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany.
- ⑤ 宮西正宜, Pure subalgebras of a polynomial ring and related topics, October 19, 2006. International School and Workshop on Polynomial Automorphisms and Related Topics, Hanoi, Vietnam.
- ⑥ 宮西正宜, Affine pseudo-planes with torus actions, Algebraic Geometry Conference ABB70, Bedlewo, Poland. Banach Conference Center, July 13, 2006
- ⑦ 宮西正宜, Quelques pensees sur le theoreme d'Ax, Seminaire de la Theorie des Nombres, Universite de Bordeaux I, France. Le 24 Mars, 2006.

[図書] (計 1 件)

宮西正宜, 茨木俊秀編, 現代数理入門, 関西学院大学出版会, 2009, 印刷中

[その他]

国内のアフィン代数幾何学研究集会を関西学院大学大阪梅田キャンパスの施設を利用して, 次の3回主催した.

(1) 2009年3月16, 17, 18日

(2) 2008年9月3, 4, 5, 6日

(3) 2008年3月10, 11, 12日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮西 正宜 (MIYANISHI MASAYOSHI)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号: 80025311

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

増田 佳代 (MASUDA KAYO)

兵庫県立大学・物質理学研究科・准教授

研究者番号: 40280416