様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２１　年　３　月　３１　日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2006〜2008
課題番号：１８５４００５９
研究課題名（和文）　有限群および代数のカテゴリー論的表現論の研究

研究課題名（英文）　A study for the categorical representation theory for finite groups and algebras

研究代表者
小田　文仁　(ODA FUMIHITO)
富山商船高等専門学校・教養学科・准教授
研究者番号：00332007

研究成果の概要：G を有限群とする．G を G-共役の作用で G-集合とみたものを G^c と書く．バーンサイド関手 B から表現環関手 R へのマッキー関手の自然変換に G^c から得られるドレス構成法を施す．新たに得られた自然変換の１点 G-集合における値が，G の斜バーンサイド環から G のドリンフェルトダブルの表現環への自然な環準同型写像を与えているという定理を得た．さらにこの結果を応用して次の結果を得た．G として p-群を考えた場合の斜バーンサイド環とドリンフェルトダブルの表現環の階数の差がデイド群の階数の和として表現できるという公式を与えた．
G の p-centric 部分群の族の一般バーンサイド環は，G のフュージョンシステムのバーンサイド環に同型であるという結果を得た．さらに，一般バーンサイド環を構成する新しい部分群の族を発見した．

交付額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| ２００６年度 | 1,100,000 | 0 | 1,100,000 |
| ２００７年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| ２００８年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 3,100,000 | 600,000 | 3,700,000 |

研究分野：代数学
科研費の分科・細目：群論，環論，表現論
キーワード：有限群，代数，圏論，バーンサイド環，マッキー関手，ドリンフェルトダブル

## １．研究開始当初の背景

有限群 G の正標数の体 k の上の表現は，モジュラー表現(modular representation)と呼ばれている．モジュラー表現論では素数 p に依拠した有限群の構造と，表現の関係を研究することが大きな主題のひとつであった．kG は直既約両側イデアル(indecomposable twosided ideal)の直和に分解される．この両側イデアルをブロック(block)と呼ぶ．一つのブロック B に対して，G の p-部分群 D(G,B)が定まる．D(G,B)を B の不足群(defect group)と呼ぶ．ブラウア(Brauer)は D の G における正規化群 N(D)のブロック b でその不足群 D(N(D),b)が D(G,B)と同型になるものと B との間には一対一の対応が存在することを証明した．現在 Brauer 対応と呼ばれているその対応は，有限群の構造とブロックの構造が極めて深い関係にあることを示唆するも

のであった.一般にＧのp-部分群Ｐに対して，N(P)はＧよりも真に小さな群となる．群論的にはＧの問題を考えるよりはN(P)の問題を考えるほうが易しい．さらにp-群ＰはN(P)の正規部分群になっているので，N(P)の問題はより小さな群 P に帰着できることが多い．N(P)のブロックの構造をさらに詳細に調べる際に，そこに含まれる加群たちを調べることは常套手段のひとつである．G のブロックに含まれる加群たちとそれらに付随する p-部分群Ｐの正規化群N(P)の加群との間にはグリーン(Green)対応と呼ばれる対応が存在する．この P は頂点(vertex)と呼ばれている．一般に不足群と頂点とは同型ではないが，同型になる場合,Brauer対応との対比で研究されることが多い.一般にp-群Ｐに対してN(P)の加群と P の加群との間にはクリフォード(Clifford)対応と呼ばれるよい対応が存在する．以上三つの対応を応用することにより，理論的にはＧの問題を小さなp-部分群Ｐの問題として考察することが可能になる.以下にＰとしてＢの不足群Ｄをとった場合の関係を図示する：

| 群 | ブロック | 加群 |
|---|---|---|
| G | B | U |
| | Brauer　対応 | Green 対応 |
| N(D) | b | S |
| | | Clifford対応 |
| D | c | T |

モジュラー表現論でＢやｂに含まれる既約加群の個数に関する問題が，重要となる場合が多く，また，解決困難であることも多い．Ｇでは，とても難しい問題が，N(D)やＤでは容易になることがある．アルペリン(Alperin)の重み予想(weight conjecture)や分解行列(decomposition matrix)の決定問題等の問題は，長い間研究されてきているが，一般の有限群に対して，満足の行くような解決を見ていない．そこで，それらの問題をN(D)やＤの問題に帰着させて解決するという戦略が，今までの研究では存在した．

それらの重要課題解決のための方策の一つに圏論的研究がある．1960年代後半，グリーン(Green)はモジュラー表現論の研究の中で，制限，誘導，共役の写像を抽象化した概念として，G-関手，ドレス(Dress)はさらに抽象化してマッキー関手(Mackey functor)を発明した．Mackey関手は，対応する加群が環の構造をもつときGreen関手と呼ばれている。制限，誘導は Brauer 対応，Green 対応，Clifford対応における作用素である,共役は不足群や頂点がその作用に関して不変な対象となるものである．約 20 年後，アルペリンの重み予想をマッキー関手を用いて言い換えるという結果がテヴェナとウエッブにより得られた．圏論的な表現論の研究への期待が高まっていた．それまでアブストラクトナンセンスと揶揄されてきた圏論は，現在にわかに脚光を浴びる分野として研究対象の一つになっているが，彼らの仕事はそれら一連の結果の先駆け的なもののひとつであった．

アルペリンの重み予想の圏論てき言い換えの結果が示されたころ，代表者は学部３年生の頃であった．その頃はその内容までは全く理解できないものであった．数学という，学問としてはすでにどちらかというと終わってしまったという感が強かった自分にとって，実はアクティヴな研究分野であるということを知るにいたった原因のひとつであった．以来，研究対象としては，困難な問題が山積している分野ではあるものの，圏論的に表現論や群論を研究することに興味をいだき，現在までこの研究を続けている．

## ２．研究の目的

圏論の理論，特に，マッキー関手の理論は，その高度な抽象化が原因で，表現論的見地からの後続の研究が極めて少ない．そこで，もっとも基本的なバーンサイド関手や表現環関手についてさまざまな例を計算し，基本的な事実を整理，統合するということが，研究の第一の目的である．さらに，現時点では明確な形で重要性を理解することが容易ではなさそうな新たな数学的概念の創出を目的とする。将来的にはこの理論を応用することにより，アルペリンの重み予想や分解行列の決定問題等の既存の表現論の問題解決に寄与することを期待している．

加群と加法的な準同型を対応させるマッキー関手，さらに，演算を一つ加えて，環を対応させるグリーン関手はよく知られている概念である．このグリーン関手が，可換環への対応になっていてさらに，乗法的な準同型をもつとき，丹原(Tambara)関手と呼ばれている．バーンサイド環，表現環，コホモロジー環の乗法的誘導準同型の研究の公理化に関する研究として，丹原大介氏により 20 年以上も前に「TNR-関手」として提唱された関手であるが，その後続研究論文は，外国人の研究者によるものだけで，その数も５本に満たない．代表者の研究対象である，斜バーンサイド環は可換環なので，乗法的誘導準同型を持つことが期待される．そこで，斜バーンサイド環の乗法的誘導準同型を，丹原関

手を用いることにより構成するというアイデアが自然に浮かぶ．丹原関手の構成は単純ではないので，時間がかかる．10 年以上前からアイデアがあり，論文作成にも着手してきているが，どうしても解決できない壁がいくつか残っていた．ところが，今回の科研費で研究発表を行うことができた「有限群のコホモロジーについて」という集会で，丹原氏に直接お会いする機会があり，いくつかのご助言をいただけた．この論文を完成させることも目的の一つである．

３．研究の方法

有限群に付随する加群や環，代数に着目する．部分群や群の間の準同型から誘導されるような，加群や代数の間の準同型等で，圏論的見地から都合のよいものを選び出す．圏論的なさまざまな構成法を応用して，表現論に関する問題解決に相当しているものについて，具体的な計算を行う．その際，計算機の計算に適合しやすい問題であるならば，例として計算機を用いて結果を蓄積する．それらの中から一般化して，命題を抽出し，証明を試みる．あるいは，新たな概念を創出する．

４．研究成果

(1) 集合 S と写像

$$m: S\times S \to S: (s,t) \to st$$

は s, t, u という S の元に対して条件

$$(st)u=s(tu)$$

を満たすときモノイドと呼ばれる．モノイド S は群 G の作用，すなわち，写像

$$f: G\times S \to S$$

が存在するとき G-モノイドと呼ばれる．

グリーン関手 A と G-集合 S に対して新たなグリーン関手 AS を

$$AS : X \to A(S\times X)$$

で定める．この AS を A の S によるドレス構成と呼ぶ．グリーン関手間の自然変換

$$F: A \to B$$

と G-モノイド S に対して，A, B の S によるドレス構成 AS, BS から新たにえられる自然変換

$$FS: AS \to BS$$

を研究代表者は Bouc 構成と呼んだ．A としてある有限群 G のバーンサイドグリーン関手，B として G の表現環グリーン関手，S として G-共役の作用で G 自身を G-モノイドとみなした場合に，一点集合 1 における写像

$$FS(1): AS(1) \to BS(1)$$

が，斜バーンサイド環からドリンフェルトダブルの表現環への自然な準同型写像となるという結果を得た．すなわち AS(1)が G の斜バーンサイド環，BS(1)が G のドリンフェルトダブルの表現環，FS(1)がそれらの間の準同型となるという定理である．

【定理】

G を有限群, A を G のバーンサイドグリーン関手，B を G の表現環グリーン関手とする．S を G-モノイドとする．このとき自然変換

$$F : A \to B$$

からドレス構成で得られる自然変換

$$FS : AS \to BS$$

は，斜バーンサイド環からドリンフェルトダブルの表現環への自然な環準同型

$$FS(1) : AS(1) \to BS(1)$$

を誘導する．

これは，任意の有限群に対して成立する結果であり，適用範囲が極めて広大であり，よい定理であると思われる．研究代表者と吉田知行氏により 2001 年に得られていた斜バーンサイド環のべき等元公式を AS(1)に応用することにより，BS(1)，すなわちドリンフェルトダブルの表現環の誘導定理を，上の定理の系として証明することができた．誘導する際の基となる集合は，与えられた有限群の巡回部分群全体の集合であるということがわかった．

【系】（ドリンフェルトダブルの誘導定理）

C を G の巡回部分群全体の族とする．C の元からの誘導準同型像の和を IndC とする．このとき

$$Ind : IndC \to AS(1)$$

は全射準同型となる．

これらの結果は後述の〔雑誌論文〕1.で発表した．

(2)(1)の記号を踏襲する．G として p-群をとると F(1)および FS(1)がいつも全射準同型になる．F(1)の全射性はリッター(Ritter)とシーゲル(Segel)の定理であり，FS(1)の全射性はその系として得られる．FS(1)の全射性から自然に導くことのできる問題の一つに，AS(1)と BS(1)の階数の差を求めるというものがある．一般の有限群では極めて困難な問題であると考えられるが，p-群に制限することで幾分容易になるように予想された．既存のさまざまな研究結果を調査し，いくつかの具体的な 2-群について，計算機を用いて例を計算させた結果, AS(1)と BS(1)の階数の差は G の共役類の代表元の中心化群のデイド群の階数の和で表現できるという定理を得た．特別な有限群，二面体群，準二面体群，一般四元数群にした場合には，双集合関手(biset funtor)の理論を応用することにより，デイド群の階数が，それぞれのパラメータに付随する自然数を用いて差が表現できるということが知られていた．そこで，その結果をこの結果に応用することにより，AS(1)と BS(1)の階数の差をパラメータを用いて具体的に

表現できるという結果を得た．具体的な結果は以下のようにまとめられる：

| 有限2-群P | Pの位数 | r(AS(1))-r(BS(1)) |
|---|---|---|
| 二面体群 | 2^n | 4n- 4 |
| 準二面体群 | 2^n | 4n- 7 |
| 一般四元数群 | 2^n | 4n-10 |

（ただし，r(AS(1))とr(BS(1))はそれぞれ斜バーンサイド環とドリンフェルトダブルの表現環の階数とする）

現在論文は印刷中（Algebras and Representation Theoryに掲載決定)である．

(3)有限p-群Pに対して，Pの部分群を対象とし，二つの部分群の間のある条件をみたす準同型写像を射とするカテゴリーをPの上のフュージョンシステム(fusion system)と呼びF(P)であらわす．フュージョンシステムはアルペリンの重み予想や分解行列の決定問題にも深く関連している概念である．ディアス(Diaz) とリブマン(Libman)はF(P)のバーンサイド環B(F(P))を構成した．彼らは，バーンサイド環としては同型であるが，フュージョンシステムとしては，非同型である有限群のペアの例をいくつか計算している．

Pがある有限群Gのシローp-部分群である場合に，Gの中心的p-根基部分群全体の族をCとする．特にCはGを含まない．このときGのCに関する一般バーンサイド環B(G,C)がB(F(P))に同型となるという結果を得た．

【定理】
B(F(P))とB(G,C)は環同型である．

一般バーンサイド環に関する研究結果は1990年の吉田知行氏の論文に始まるが，与えられた有限群Gを含まない族から得られる例はほとんどなく，未知の例を与えるという結果にもなっている．後述の〔雑誌論文〕2.で発表した．

(4) (3)の族C内の部分群Pは，そのGにおける正規化群NPにおける最大の正規p-部分群がまたPになるとき，中心的p-根基部分群とよぶ．Gの中心的p-根基部分群の全体をBpとする．さらに，Bpのすべての群の正規化群の族をNとする．このNに対してB(G,N)が一般バーンサイド環となることを証明した．

【定理】
B(G,N)は一般バーンサイド環になる．

この結果にはさらなる発展があり，現在研究継続中である．たとえば，B(G,N)の単位元が与える一般表現がスタインバーグ(Steinberg) 加群と呼ばれるものと関連していることや，Bpのオイラー標数の計算問題等に応用するというようなことができる．現在，論文は印刷中(Advances in Mathematicsに掲載決定)である

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　4　件）
1. Fumihito Oda, Crossed Burnside Rings and Bouc's construction of Green functors, Journal of Algebra 315, 18-30 (2007) 査読有.
2. Fumihito Oda, The generalized Burnside ring with respect to p-centric subgroups, Journal of Algebra 320, 3726-3732 (2008) 査読有.
3. 小田文仁, On the crossed Burnside rings, 数理解析研究所講究録, 1564, 14-16 (2007) 査読無.
4. 小田文仁, A morphim of Green functors, 数理解析研究所講究録, 1581, 126-134 (2007) 査読無.

〔学会発表〕（計　7　件）
1. 小田文仁, Crossed Burnside ring について, 群論とその周辺(RIMS研究集会), 京大会館, 2006年12月.
2. 小田文仁, The crossed Burnside rings and the representation ring of Drinfel'd double, 第24回代数的組合せ論研究集会, 近畿大学, 2007年6月.
3. 小田文仁, A morphism of Green functors, 有限群のコホモロジー論の研究（RIMS研究集会）京都大学数理解析研究所, 2007年8月.
4. 小田文仁, Crossed Burnside rings and Bouc's constructions, 日本数学会秋季総合分科会, 東北大学, 2007年9月.
5. 小田文仁, The partial Burnside ring relative to p-centric subgroups, 第25回代数的組合せ論シンポジウム, 北海道大学, 2008年6月.
6. 小田文仁, The crossed Burnside ring, the Drinfel'd double, and the Dade group of a p-group, 日本数学会秋季総合分科会, 東京工業大学大岡山キャンパス, 2008年9月.
7. 小田文仁, The generalized Burnside ring with respect to p-centric subgroups, 日本数学会秋季総合分科会, 東京工業大学大岡山キャンパス, 2008年9月.

〔その他〕
なし

６．研究組織

(1)研究代表者

小田　文仁
富山商船高等専門学校・教養学科・准教授
研究者番号：００３３２００７

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし