

平成22年 4月28日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2008

課題番号：18540061

研究課題名（和文） 複素空間形内のウエンテトーラス

研究課題名（英文） Wente Torus in complex space forms

研究代表者

劔持 勝衛（KENMOTSU KATSUEI）

東北大学・大学院理学研究科・名誉教授

研究者番号：60004404

研究成果の概要：3次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面論を拡張する目的で、本研究では複素2次元複素空間形内で平均曲率ベクトル場が平行な実2次元曲面の局所構造を研究した。その結果このような曲面はケーラー角度関数の性質によりI型とII型の2種類に分かれることを示した。

I型については曲面の構成法まで含めて完全な理解が得られた。II型の曲面については第一、第二基本形式が決定できたことによりそのような曲面の局所構造の解析をほぼ終了した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	480,000	3,280,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：幾何学・数学

キーワード：微分幾何学

1. 研究開始当初の背景

3次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面論は球面以外の閉じた曲面がウエンテにより1980年代に発見されてから、この種の曲面の研究が盛んになった。ウエンテはトーラスから3次元ユークリッド空間への

平均曲率一定なはめ込みを見つけたもので、ここではその曲面をウエンテトーラスと称する。本研究はそのウエンテトーラスをより高次元の空間に拡張しようとする試みである。4次元以上のユークリッド空間、更に一般に4次元以上の実空間形では、非自明な拡

張はないという結果が先行研究として知られているから、本研究では実空間形の代わりに複素空間形内の曲面をとりあげた。このとき、余次元が2の場合での先行結果としては、曲面のケーラー角度関数が一定の場合や曲面のガウス曲率が一定の場合、このような曲面の分類定理がある。よって、先ずこれらの2条件が満たされない、一般型の曲面の研究からはじめた。

また、平均曲率が一定という条件がどのような重要性を持つかという問題意識から周期的に変化する平均曲率をもつ回転面が研究されていたので、この結果の一般化が問題となっていた。

2. 研究の目的

本研究では複素2次元複素空間形内の実2次元の曲面で平均曲率ベクトル場が平行な場合を研究する。この種の曲面は3種類に分けられるが、その中でも「一般型」と称される曲面をしらべる。これは、3次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面を自然に含んでいるので、ウエンテトーラスもその例である。本研究では複素空間形内の種数1の平均曲率一定曲面を構成することが最終目標で、これによりウエンテトーラスの自然な一般化が得られる。

先ず、複素次元2の複素空間形内で平均曲率ベクトル平行な実2次元曲面の局所構造の解析を行う、そしてその結果を使って大域的結果を得ることを目的とする。

3次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面に関する Ricci の条件に関する定理の一般化を得ることも目的の一つである。

関連する研究として、一定平均曲率の仮定をゆるめて周期的平均曲率をもつ回転曲面とその高次元化も考察する。得られる曲面が周期的になるための必要十分条件を平均曲率関数だけで表すことを目標にした。

3. 研究の方法

先ず成すべきことは、考察する曲面の局所構造を明らかにすることである。そのために、先行研究や部分多様体論における最新の研究手法を得るために、関連する研究集会に出席し情報交換を行う。同時に、私の得た結果を世界各地の大学や研究所での幾何学セミナーや学会等で積極的に発表することにより、研究者との意見交換を行い、常に新たな刺激を得ることに勤める。また、最新の成果が書かれた専門書の購入も必要である。これまでの代表者の研究によりこの種の曲面の第二基本形式の2階の共変微分が関係する式の簡略化が必要で、そのために高性能のパソコンと数式計算処理ソフトが必要である。

数学的作業としては、平均曲率ベクトルがゼロでなくかつ平行という仮定を使ってはめ込みに沿って単位ベクトル場のシステムを作る。それに関してはめ込みの方程式を書き下し、それを動標溝理論、微分式系理論により曲面の法束を解析する。そこから得られた情報を偏微分方程式論における過剰決定系理論を応用してケーラー角度関数を解析する。以上でケーラー角度関数、第一、第二基本形式の情報が全て得られる。最後にこれらを使って、関数論、特にリーマン面の理論と正則2次微分を応用して、トーラスの場合の解析を行う。

4. 研究成果

(1) 複素2次元複素空間形内の平行な平均曲率ベクトル場をもつ実2次元曲面は2種類に分かれることを発見した。それぞれ、I型、II型の曲面と称する。それぞれの曲面に対し、その局所構造定理を得た。具体的には定理1として、与えられた正数 b に対し、実2次元リーマン多様体から正則断面曲率が $-12bb$ の複

素双曲型平面への平行平均曲率ベクトルをもつ I 型はめ込みの族を構成した。更に、I 型曲面は 2 個の任意定数と 1 個の調和関数で定まることを示した。

定理 2 として、II 型のはめ込みはひとつの複素関数で定まることを示した。定理 2 の証明において、ケーラー角度関数が一定でない場合、第二基本形式の全ての成分がひとつの複素関数で記述できることが重要な点であるが、平成 20 年度の研究でこの部分の証明の簡素化を得た。

(2) トーラスからのはめ込みに関連して周期的平均曲率を許容する回転超曲面を研究した。研究代表者による 2 次元の場合の先行結果を Dorfmeister との共同研究で一般次元の場合に拡張した。その成果を中国・広州の中山大学幾何学セミナーで発表、そして論文が 2 編出版された。得られた結果として、実数全体で定義された実解析的関数 $H(s)$ に対し、同じ実数全体で定義された回転超曲面が存在し、その平均曲率が与えられた $H(s)$ となることを示した。この種の回転超曲面は 2 階の常微分方程式の解で定義されるから、通常解の存在定理からは局所的な存在しか主張できないが、我々の結果はそれが一意的に実数全体に拡張できることを主張している。次に高次元の回転超曲面の集合と 2 次元の回転面全体の間には自然な対応があることを発見し、周期的回転超曲面の存在は 2 次元の結果から得られることを示した。この結果により、高次元の周期的回転超曲面の平均曲率関数の性質を明らかにした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

1. J. Dorfmeister and K. Kenmotsu, Rotational hypersurfaces of periodic mean curvature, *Differential Geometry and its Applications*, 2009
10.1016/j.difgeo.2009.03.010 (オンライン出版), 査読有
2. J. Dorfmeister and K. Kenmotsu, On a theorem by Hsiang and Yu, *Ann Glob Anal Geom*, 33(2008), 245–252, 査読有

[学会発表] (計 8 件)

1. 劔持 勝衛 Rotational hypersurfaces of periodic mean curvature, COMCA2008 招待講演、2008 年 7 月 31 日、イキケ市(チリー)
2. 劔持 勝衛 Rotational hypersurfaces of periodic mean curvature, 数学科招待講演会、2008 年 5 月 26 日、広州市 中山大学(中国)
3. 劔持 勝衛 Rotational hypersurfaces of periodic mean curvature, 数学科招待講演会、2008 年 3 月 7 日、サンパウロ大学数学科(ブラジル)
4. 劔持 勝衛 Rotational hypersurfaces of periodic mean curvature, 数学科招待講演会、2008 年 2 月 22 日、セアラ大学数学科(ブラジル)
5. 劔持 勝衛 On a Theorem about Hsiang and Yu, 北京理工大学幾何学セミナー、2007 年 6 月 4 日、北京市(中華人民共和国)
6. 劔持 勝衛 Surface of revolution with periodic mean curvature, Korea Ufniversity, 2007 年 12 月 20 日、ソウル(韓国)
7. 劔持 勝衛 Periodic meancurvature surfaces, "2006 Joint Seminar of The NSFC-KOSEF Scientific Cooperation Program", 2006 年 9 月 16 日～9 月 18 日、瀋陽市(中国)
8. 劔持 勝衛 On the Ricci condition of cmc-surfaces in complex space forms, 国際研究集会 "Methods of Integrable systems in Geometry" 2006 年 8 月 17 日、ダーラム大学(イギリス)

〔図書〕(計1件)

1. 西成活裕、Tobias Kretz、三部幸治、剣持勝衛、Tim Hoffman、源田悦夫、安倍直樹、Aurelie Lozano、村田昇、福本康秀、コンソーシアム「マス・フォア・インダストリ」第1回フォーラムCOE Lecture Note Vol.12, KyushuUniversity, 2008, 35-45.

〔産業財産権〕

○出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kenmotsu>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

剣持 勝衛 (Kenmotsu Katsuei)
東北大学・大学院理学研究科・名誉教授
研究者番号：60004404

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：