

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2009

課題番号：18540064

研究課題名（和文）リー群のホモトピー的性質の研究

研究課題名（英文） Study of homotopical properties of Lie groups

研究代表者

大嶋 秀明（OSHIMA HIDEAKI）

茨城大学・理学部・教授

研究者番号：70047372

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：リー群, ホモトピー

## 1. 研究計画の概要

リー群をホモトピー的側面から研究する．特にリー群 $G$ の連続自己写像を主に研究する：

- (1)  $G$ の自己連続写像のホモトピー類群 $H(G)$ の解析．
- (2)  $G$ の連続自己写像全体のなす位相空間 $\text{map}(G,G)$ のホモトピー群の計算．
- (3)  $G$ の自己ホモトピー同値写像のホモトピー類群 $E(G)$ と関連する群の計算．
- (4) 単連結単純リー群の圏から群の圏への関手 $H, E$ が忠実であるか否か，否の場合にはその度合いを決定する．

## 2. 研究の進捗状況

上記番号に合わせる：

- (1)  $G$ の階数が低い場合， $G$ の細胞構造から誘導されるプッペの完全系列を用いて $H(G)$ の群構造を，群拡大を除いて，まず決定し，次いで戸田ブラケットその他の道具を用いて群拡大を決定し，結果として $H(G)$ を完全に決めることが出来た．一般の単純群 $G$ に対しては同じ手法は使えそうになく難しい．低階数の場合の成功例は代表者により提唱された次の予想を支える情報である．予想：単純リー群 $G$ に対し $H(G)$ のべき零指数は $G$ の階数以上である．この「予想」の証明が本研究の大きな目標の一つであるが，目途は未だたっていない．
- (2)  $\text{map}(G,G)$ の $n$ 次ホモトピー群は， $n=0$ ならば(1)の対象 $H(G)$ である．階数2の例外リー群 $G_2$ について $n=1$ の場合が決定できた．また $SU(3), Sp(2)$ などについて $n<12$ まで計算が済んだ．これらのうち， $n<9$ までの結果と $G_2$ の $n=1$ の結果は雑

誌に公表した． $SU(3), Sp(2)$ の $n=9,10,11$ の結果は印刷待ちである．手法は(1)と同様に $G$ の細胞構造とプッペ完全列を用い，また，いくつかのリー群の関係するファイブレーションの誘導する完全系列も用いた．

- (3) 単連結な $G$ に対しては研究代表者を含む多くの研究者により見るべき結果が得られてきた．非単連結の場合は問題が難しく，わずかな結果しか知られていなかったが，本研究において $SO(4)$ に対し満足すべき結果を得た．すなわち，まずホモトピー群の恒等写像を誘導する元全体からなる群 $E_{\#}(SO(4))$ を完全に記述し，次に商群 $E(SO(4))/E_{\#}(SO(4))$ を初等的な群論の手法により決定し，結果， $E(SO(4))$ を群拡大を除いて決定した．
- (4) 各 $G$ 毎に $H(G)$ や $E(G)$ の大雑把な性質を調べているが，未だ最終的な結果を得るには至っていない．

## 3. 現在までの達成度

③やや遅れている．上記(2)については順調に進展し，これからも結果を得られる見込みであるが，他はどれも予想以上に問題が難しいことが判明した．

## 4. 今後の研究の推進方策

(2)については色々な $G$ について計算を続行する．(4)については有理化により差別化できるものを数え上げ，差別化できないものについては個別の $G$ 毎に種々のファイブレーションやコファイブレーションを用いる等の方策を考える．(1),(3)についても同様である．

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Ken-ichi Maruyama and Hideaki Oshima, Homotopy groups of the spaces of self-maps of Lie groups, J. Math. Soc. Japan 60, 767-792, 2008, 査読有.
- ② Hideaki Oshima, A quotient group of the group of self homotopy equivalences of  $SO(4)$ , Kodai Math. J. 31, 82-91, 2008, 査読有.
- ③ Shigeru Yamagami, Notes on operator categories, J. Math. Soc. Japan 59, 541-555, 2007, 査読有.
- ④ Martin Arkowitz, Jeffrey Strom and Hideaki Oshima, Homotopy classes of self-maps and induced homomorphisms of homotopy groups, J. Math. Soc. Japan 58, 401-418, 2006, 査読有.

[学会発表] (計1件)

Hideaki Oshima, Homotopy classes of self maps, International Conference on Algebraic Topology, Henan University, 15 October, 2006.