

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540069

研究課題名 (和文) 曲面を用いた結び目の研究

研究課題名 (英文) Research on knot theory using essential surfaces

研究代表者

下川 航也 (Shimokawa Koya)

埼玉大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：60312633

研究成果の概要：

結び目理論におけるデーンス手術の研究と、その結果の DNA の研究への応用を行った。

結び目のデーンス手術とは結び目の近傍であるソリッドトーラスを取り除き、異なる貼り方で貼ることにより 3 次元多様体を構成する方法である。現在のデーンス手術の研究の中心的な課題は、双曲結び目や絡み目の例外デーンス手術 (非双曲多様体が得られるもの) の研究である。

一方 DNA に作用する酵素は結び目理論の有理タングル手術を持ちいてモデル化されている。有理タングル手術の 2 重分岐被覆を考えると結び目のデーンス手術が対応するため、DNA の酵素の働きの位相幾何学的研究は結び目のデーンス手術の研究と深い関係がある。

今回の主な研究成果は以下の通りである。1. 長さ 3 のプレッツェル結び目の有限デーンス手術の分類。2. 有理タングル手術の研究とその結果の DNA に働く酵素 Xer の研究への応用。3. Xer による DNA 絡み目の絡み目解消操作の特徴付け。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,200,000	0	1,200,000
2007 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	660,000	4,060,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何

1. 研究開始当初の背景

Thurston による双曲多様体の研究により、結び目のデーンス手術は双曲結び目の例外デーンス手術の特徴付けが中心的課題となっていた。ポアンカレ予想に関して、結び目のデーンス手術においては性質 P 予想が解決され、研究対象は 3 次元球面内の結び目のデーンス手術でレンズ空間などの有限基本群 3 次元

多様体を得られる場合に移っていった。強可逆結び目のデーンス手術でレンズ空間 $L(p, 1)$ が得られる場合には $p=5$ であり結び目は三葉結び目に限るという結果を申請者は 2000 年に共同研究で示したが、その結果が一般の結び目に拡張された。また、申請者の共同研究により、有限デーンス手術の手術スロープと本質的曲面のスロープとの間に深い関係があ

ることが示された。しかし、一般的なレンズ空間を得るデー手術や有限基本群の多様体を得る場合のデー手術の分類は不明であった。

また、デー手術の結果の DNA の研究への応用は 1990 年頃から行われていたが、近年になり生物の専門家と位相幾何学の専門家の連携がより活発になり多くの結果が出始めていた。

2. 研究の目的

3 次元球面内の双曲結び目の例外デー手術、特に有限デー手術の特徴付けが目的である。特に、結び目の本質的曲面を用いて研究を行う。その結果を DNA の部位特異的組み換えの研究に応用する。また逆に DNA の部位特異的組み換え酵素の実験から得られる情報を、対応するデー手術を分類することにより特徴付ける。

3. 研究の方法

今回の研究では、まず 3 次元球面内の結び目のデー手術で有限基本群が得られる場合について考察し、特に結び目をプレッツェル結び目に限定した場合の分類を行う。ここでは、結び目の補空間の基本群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現から定まるスロープのノルムを用いた手法を中心に、双曲多様体の理論や有限群の性質を用いて研究を行った。

結び目、絡み目の有理タングル手術の研究を行った。ここでは特にバンド手術の場合を考察し、申請者が以前共同研究で示したバンド手術に関する結果を活用し、種数 1 の結び目から種数 0 の絡み目を得られる場合を考察した。特に 2 橋結び目、絡み目の場合を考察したので、2 重分岐被覆を考察するとレンズ空間からレンズ空間のデー手術が対応し、それに関する結果を得た。この研究の背景には DNA の部位特異的組み換えがある。この結果を Xer の研究へ応用した。

また、Xer が DNA 絡み目を解く場合の研究を行った。この作用は絡み目のツイストに対応するため、トーラス絡み目をツイストし自明絡み目を得られる場合を考察した。

4. 研究成果

主な研究成果は以下の 3 つに分類される。それぞれについて説明する。

① 長さ 3 のプレッツェル結び目の有限デー手術の分類について。

結び目のデー手術において中心的な課題は、双曲結び目の例外デー手術の分類である。特に 3 次元球面内の結び目の有限デー手術は重要な問題である。この研究では、プレッツェル結び目の有限デー手術の完全な分類を行った。

これまでの研究において、プレッツェル結び目のうちタイプ $(-2, p, q)$ 以外については分類が終了していたので、そのタイプについて研究を行った。得られた結果は、タイプ $(-2, p, q)$ のプレッツェル結び目の p/q -デー手術で有限基本群の多様体を得られるとすると、 $(-2, 3, 7)$ -プレッツェル結び目の 17, 18, 19-デー手術か、 $(-2, 3, 9)$ -プレッツェル結び目の 22, 23-デー手術となるというものである。

ここで用いた手法は、結び目の補空間の基本群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の character variety から定義される Culler-Shalen norm、有限群に関する最近の研究、プレッツェル結び目の補空間の双曲構造、3 次元双曲多様体の例外デー手術のスロープの長さなどである。

この研究の結果は、David Futer 氏、石川昌治氏、蒲谷祐一氏、Thomas W. Mattman 氏との共同研究であり、Algebr. Geom. Topol. (2009) に掲載された。

② 有理タングル手術の研究とその結果の DNA に働く酵素 Xer の研究への応用。

この研究では、 $(2, 2k)$ -トーラス絡み目に有理タングル手術を行い 2 橋結び目 $b(4mn-1, 2m)$ が得られる場合を考察した。特に今回は有理タングル手術がバンド手術である場合について分類を行った。

この結果の応用として、レンズ空間内の結び目のデー手術の研究が挙げられる。有理タングル手術は 2 重分岐被覆の空間で考えるとデー手術に対応する。考えている結び目、絡み目は 2 橋結び目と絡み目のため、上記の結果は、レンズ空間内の結び目のデー手術でレンズ空間を生むものに関する結果を与える。

応用として、DNA に働く酵素 Xer の働きの位相幾何学的特徴付けを行った。大腸菌の染色体やプラスミドに働く酵素の Xer について、psi という部位への作用に関する研究があり、その数学的特徴付けを行った。psi の部位は通常 DNA 結び目上にある場合に Xer が作用するが、DNA 絡み目として $2m$ -cat($(2, 2m)$ -トーラス絡み目) のそれぞれに psi 部位をおいた場合も Xer が作用するという実験結果(1999)がある。そこでは、例えば 6-cat に Xer が作用し、7 交点の結び目が得られると報告されている。この研究では、その結び目が 7_2 結び目か 7_4 結び目であり、その作用がバンド手術としてモデル化される場合について完全な特徴付けを行った。

用いた手法は、バンド手術に関する平澤・下川の結果(Proc. Amer. Math. Soc., 2000)な

どである。今回の研究では種数1の結び目が種数0の絡み目にバンド手術により変形されると考え、平澤-下川の結果によりそのバンドが最小種数のザイフェルト曲面上に乗ることを用いて特徴付けた。

この研究は、Isabel K. Darcy 氏、石原海氏、Ram Medikonduri 氏との共同研究であり、論文は現在プレプリントである。

③ Xer による DNA 絡み目の絡み目解消操作の特徴付け。

この研究では、2007年に報告された酵素 Xer による DNA 絡み目の絡み目解消に関する実験結果について、iterative model というモデルを仮定した上での Xer の作用の位相幾何学的特徴付けを与えた。この実験では Xer は FtsK とともに diff 部位への作用で、大腸菌の染色体やプラスミドの絡み目を解消することが報告されている。普通の状況ではこの絡み目解消はトポイソメラーゼが行うが、トポイソメラーゼが働かない場合に Xer が代わりに絡み目を解くことが出来るというものである。ここでは iterative model を仮定すると、絡み目解消操作は1箇所ツイストになる。問題はツイストによりトラス絡み目が自明な絡み目になる場合の特徴付けとなる。この問題をトラスの最小種数ザイフェルト曲面を用いて解決した。

この結果の概略は国際会議のプロシーディングとして、Bussei Kenkyu において出版された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

① Masaharu Ishikawa and Thomas W. Mattman, and Koya Shimokawa, Exceptional surgery and boundary slopes *Osaka J. Math.* **43**, 807-821 (2006) (査読有)

② David Futer, Masaharu Ishikawa, Yuichi Kabaya, Thomas W. Mattman, and Koya Shimokawa, Finite surgeries on three-tangle pretzel knots *Algebr. Geom. Topol.* **9**, 743-771 (2009) (査読有)

③ Koya Shimokawa, Kai Ishihara, and Mariel Vazquez, Tangle analysis of DNA unlinking by the Xer/FtsK system, To appear in *Bussei Kenkyu* (2009) (査読無)

[学会発表] (計5件)

① 下川航也, DNA and lens space surgery, 研究集会「結び目のトポロジーIX」, 2006年12月20日, 日本大学.

② 下川航也, Tangle analysis of unlinking DNA links by XerCD, 研究集会「結び目のトポロジーX」, 2007年12月23日, 東京女子大学.

③ 下川航也, Tangle analysis of DNA catenane unlinking by the Xer/FtsK system, 国際会議「結び目とソフトマター物理学: 高分子のトポロジー、そして物理学、数学および生物学における関連する話題」, 2008年8月28日, 京都大学基礎物理学研究所.

④ 下川航也, DNA and Dehn surgery on knots, 小研究集会「曲線と曲面の非線型解析」, 2008年12月17日, 埼玉大学大宮ソニックシティカレッジ.

⑤ 下川航也, Tangle analysis of DNA catenane unlinking by the Xer/FtsK system, 国際会議「San Francisco international meeting on DNA topology」2009年4月24日, University of California San Francisco.

[その他]

国際会議「結び目とソフトマター物理学: 高分子のトポロジー、そして物理学、数学および生物学における関連する話題」(Knots and soft-matter physics: topology of polymers and related topics in physics, mathematics and biology) を、2008年8月26日-29日に京都大学基礎物理学研究所において、出口哲生(お茶の水女子大学)等と共催

ホームページ

<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/KoyaShimokawa.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

下川 航也 (SHIMOKAWA KOYA)
埼玉大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号: 60312633

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

水谷 忠良 (MIZUTANI TADAYOSHI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 20080492
阪本 邦夫 (SAKAMOTO KUNIO)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：70089829
長瀬 正義 (NAGASE MASAYOSHI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：30175509
江頭 信二 (EGASHIRA SHINJI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：00261876