様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年 6 月 10 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006 年度～ 2009 年度
課題番号：18540070
研究課題名（和文） ラドン・ペンローズ変換と無限次元表現論を用いた開複素等質多様体上の大域解の研究
研究課題名（英文） The Radon-Penrose transforms and infinite dimensional representation theory, and their applications to the global analysis on non-compact complex homogeneous spaces

研究代表者 関口 英子（SEKIGUCHI HIDEKO）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：50281134

研究成果の概要（和文）：一般の次元の不定値グラスマン多様体 X 上の正則直線束を係数とするコホモロジーを X のサイクルで積分することにより積分変換(ラドン･ペンローズ変換)が定義される．この変換によって X のコホモロジーの空間はサイクル空間 Y 上の高階の偏微分方程式系の大域解の空間と 1 対 1 に対応していることを証明した．これは，管状領域に対して従来，知られていた結果を特別な場合として含んでいる(論文 [1])．また，D 型有界対称領域の場合にラドン・ペンローズ変換を構成し，この変換を用いてある半単純対称対に関する無限次元表現の分岐則を決定した．

研究成果の概要（英文）：Our main concern is with the characterization of the image of the Penrose transform by means of a system of partial differential equations on the cycle space. I have extended my previous results (the case that the transformation groups are indefinite unitary groups ) to non-tube domains of type AIII ([1]), and also found explicit branching laws of certain singular unitary representations with respect to symmetric pairs by using the Penrose transform.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合 計 |
|---|---|---|---|
| 2006 年度 | 1,000,000 | 0 | 1000,000 |
| 2007 年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| 2008 年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| 2009 年度 | 600,000 | 180,000 | 780,000 |
| 年度 | | | |
| 総 計 | 2,600,000 | 480,000 | 3080,000 |

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：ペンローズ変換，半単純リー群，ユニタリ表現，有界対称領域，複素多様体，積分幾何，概均質ベクトル空間，超幾何函数

１．研究開始当初の背景
「ラドン・ペンローズ変換と無限次元表現論を用いた開複素等質多様体上の大域解の研究」をテーマとする当該研究を開始した時点で以下のことが知られていた．

(1) Gauss の超幾何微分方程式の多変数化(2 × 2 小行列式として表される 2 階の偏微分方程式が主要項となる)とその解の研究(青木，Gelfand 学派)

(2) 重力場のない場の方程式（2 階の偏微分方程式)の大域解の構成（Penrose のツイスター理論，1960 年代）

(3) 半単純リー群の離散系列表現をリーマン対称空間上のベクトル束に係数をもつ 1 階の偏微分方程式系の解として構成する Schmid，堀田，Parthasarathy の理論(1970 年代)

(4) 管状領域上で高階の k × k 小行列式型の偏微分方程式系の任意の大域解は Penrose のツイスター理論の高次元として得られる(関口).

一方，サイクル空間が非管状領域になる場合，例えば，p ≠q の場合の不定値グラスマン多様体 G(k,(p,q)) に対するペンローズ変換の像の決定問題は未解決であった.

２．研究の目的

部分多様体の族の上で積分することによって，積分変換を定義し，その核や像を決定するというのが積分幾何の基本問題である．特に，微分方程式の大域解を積分幾何の手法によって構成するという視点は，直線上の積分（現在では医学への応用から X 線変換と呼ばれることもある）を用いて超双曲型方程式の解を構成した F. John にさかのぼる.

当該研究では，Penrose の構成した積分変換を高次元に一般化し，F. John の考え方を，対称性の高い非コンパクトな複素多様体上の Dolbeault コホモロジーに適用することによって，複素解析的な高階の微分方程式系の正則大域解を全て構成することをテーマとしている.

より具体的にはコンパクトでない複素多様体の例として不定値グラスマン多様体 X=G(k,(p,q))を考える．これは n=p+q 次元の複素ベクトル空間に平坦かつ符号 (p,q) の不定値符号をもつケーラー計量を入れ，その k 次元部分空間のうち，誘導計量が正定値になるものを集めて得られる複素多様体である．定義より，X はグラスマン多様体 G(k, p+q) の開部分集合として実現される．X のコンパクト複素部分多様体であるグラスマン多様体 G(k,p)を移動して得られるサイクルは，D 型の有界対称領域 Y でパラメトライズされる.サイクル空間 Y 上に高階の偏微分方程式系を定義し，その大域解の積分表示を構成することで X と Y 上のコホモロジー（あるいは関数）の対応関係を与え，Penrose 変換の像を完全に決定することを主要な目的とする．さらに不変式論やユニタリ表現の分岐則を積分幾何に応用するという手法自身の開発を副次的な目的とする.

なお，p=q=2, k=1 の場合が Penrose—Eastwood—Wells によって研究された場合に対応する.

３．研究の方法

(1)（無限次元表現の構成）
非コンパクトな実簡約等質空間 X が複素構造をもつとき， X は一般には Stein 多様体ではないため，その関数空間としてはコホモロジーまでこめて考える必要がある．特異なユニタリ表現を Borel-Weil-Bott の定理の一般化として，非コンパクトな複素多様体上に構成する.

(2)（サイクル空間の構造)
不定値グラスマン多様体 G(k,(p,q)) には,自然なコンパクト複素部分多様体(一般化された旗多様体)が存在する．従って，群による左移動によって部分多様体の族を得ることができる.

(3)（ペンローズ変換の構成)
Eastwood-Penrose-Wells によって構成された複素 3 次元と複素 4 次元の多様体を結びつける Radon-Penrose 変換の理論を高次元化する．ペンローズ変換の構成は次の二つの変換がモデルになる.
①(積分幾何における立場) 部分多様体の族が与えられているとき，各部分多様体の上で積分する(ラドン変換，X 線変換など).
② （コホモロジーの引き戻し）部分多様体の族が与えられているとき，コホモロジーの元を各部分多様体に引き戻すことができる.
このとき，① あるいは② により，部分多様体の族をパラメトライズする多様体(実は有界対称領域になる)上の函数が得られる.

(4)（青本-Gelfand の超幾何微分方程式の一般化)
サイクル空間となる古典型有界対称領域上に，青本-Gelfand の超幾何微分方程式系の主要項を 2 階から高階に一般化した偏微分方程式系を群論的に定義する.

(5)（ペンローズ変換の像と核の決定）
①あるいは②で得られた Penrose 変換の像と核を表現論を援用して具体的に決定する．その手法として佐藤による概均質ベクトル空間の理論と b-関数，小林による離散的分岐則の理論を用いる.

４．研究成果

複素簡約リー群 G の放物型部分群を P とすると等質空間 G/P(一般化された旗多様体)はコンパクトな複素多様体である． G_R を G の任意の実形とすると G/P は G_R の有限個の軌道に分かれることが知られている（青本, Wolf, 松木)．特に軌道として開集合であるものが存在する（開軌道という)．開軌道は明らかに複素多様体である．

本研究では上記の設定において G=GL(n,C) とし，P の Levi 部分群が GL(k,C)×GL(n－k,C), G_R=U(p,q) (p+q=n)の場合を主要な例として考察した．このとき G/P はグラスマン多様体 G(k,n) であり，k≦p のときに X=G_R/L_R ≅U(p,q)/U(k) × U(p－k,q)はその上の開軌道となる．X は非コンパクト複素多様体である．

(1) (コホモロジー空間の研究)
X 上の標準直線束に係数をもつコホモロジー空間 V は k(p－k) 次元以外で消え，k(p－k)次元では無限次元になる. Vogan 等による代数的無限次元表現論を用いると，変換群 G_R=U(p,q) は V に既約に作用することが分かる．しかし本研究では標準直線束よりもさらに特異なパラメータをもつ正則直線束のコホモロジーが必要になる．この場合には Vogan 等の結果よりもさらに強力な結果が必要になる．そこで Beilinson—Bernstein による D-加群，小林による特異表現の研究(Memoirs of Amer. Math. Soc. 1992)を援用することによって，非常に特異な正則直線束を係数とする無限次元コホモロジー空間の表現論的性質を証明した.

(2) (サイクル空間の研究)
不定値グラスマン多様体 X=G(k, (p,q)) には C^p ⊂ C^{p+q} に含まれる k 次元部分空間からなるグラスマン多様体，すなわち，コンパクト多様体 G(k, p) が部分多様体として含まれる. さらに G(k,p)を G_R によって動かして得られる部分多様体の族は多様体 Y をなす．Y をサイクル空間という．Y は自然に有界対称領域 U(p,q)/U(p) × U(q) と同一視することができる．なお， p=q ならば Y は管状領域であり， p≠q ならば非管状領域である.

(3) (ペンローズ変換の構成)
X 上のコホモロジーは k(p－k)次のみに生じる．一方， (2) で述べた各サイクルはすべて k(p－k)次元になる.

そこでコホモロジーを代表する微分形式ωを各サイクル上で積分することによって，Penrose が定義した積分変換を高次元化することができる．この変換も以下では Penrose 変換と呼ぶことにする. Penrose 変換を群論的に解釈することにより, (一般化された意味での) Penrose 変換が， 開軌道上のコホモロジー空間から複素部分多様体上の関数空間への intertwining operator であることが分かる.

(4) (青本—Gelfand の超幾何微分方程式系の高階化)
サイクル空間 Y は G_R が双正則に作用する有界対称領域 G_R/K_R = {Z ∈ M(p,q;C):I－Z^* Z >>0} に他ならない．Y 上で k+1 次小行列式を用いて偏微分方程式系 M_k を定義する． k=1 の場合は青本—Gelfand の超幾何微分方程式系の主要項になる. 佐藤幹夫による b-関数の理論を用いることによって余次元が min(p,q) の可解リー群の作用に関して, M_k の生成元の変数分離の公式を証明した.

(5) (3)で得られた積分変換 R は不定値グラスマン多様体上のコホモロジーωをサイクル空間 Y 上の函数 Rω にうつす.

論文[1] において Rω はサイクル空間上の正則函数であり，偏微分方程式系 M_k の解になっていることを証明した.

(6) 逆にサイクル空間上の正則函数で M_k の解は一意的に Rω(ωは グラスマン多様体上のコホモロジー)として表されることも証明した.

以上の成果を東京大学で行われた国際研究集会(2009) "Differential Equations and Symmetric Spaces"で公表した.

(7) これらの研究に関連した半単純リー群の無限次元表現論に関する説明と， Penrose 変換の像の研究における有用な手法ついての解説を執筆し,「表現論とペンローズ変換」として， 雑誌『数理科学』(サイエンス社)から出版した.

(8) 当研究代表者はもとの複素簡約リー群 G が A 型である場合と C 型である場合には, Penrose 変換の単射性に関して著しく異なることを発見し，その成果を筑波大学で行われた国際研究集会(2006)の"Integral Geometry and Harmonic Analysis"で公表した.

(9) さらに， ２つの空間における Penrose 変換を変換することによって，実シンプレクティック群に制限したときの分岐則を決定した．これは小林による「離散的分岐則」の枠組みにおける分岐則の新しい例になっている.

また,「無限次元表現論」に関する概説記事を『数理科学』で発表した.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）


[1] H.Sekiguchi, Penrose transform for indefinite Grassmann manifolds, accepted for publication in International Journal of Mathematics.（査読有）

[2] H. Sekiguchi, 無限次元表現, 数理科学, 特集「無限次元の魅力」, 559, サイエンス社, 2010 年 1 月号, 43-48.

[3] H. Sekiguchi, 連続群とその表現論を学ぶための本, 応用数理（日本応用数理学会誌), 17, (2007) 62-64.

[4] H. Sekiguchi, 表現論とペンローズ変換, 数理科学, 520, サイエンス社, 2006 年 10 月号, 34-40.


〔学会発表〕（計２件）

（国際研究集会における講演）


H.Sekiguchi, Penrose transform between symmetric space,
Conference in honor of Toshio Oshima's $60^{th}$ birthday "Differential Equations and symmetric Spaces", The University of Tokyo, Japan, 2009 年 1月.

H.Sekiguchi, Radon-Penrose transform for the quantization of elliptic orbits, International Conference "Integral Geometry and Harmonic Analysis"(organizers: Fulton Gonzalez, Tomoyuki Kakehi, Toshio Oshima) University of Tsukuba, Japan, 2006 年 8 月.


６．研究組織

(1)研究代表者


関口英子（SEKIGUCHI HIDEKO）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：50281134


(2)研究分担者

（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　）

研究者番号：