

平成 21 年 6 月 5 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006 ～ 2008

課題番号：18540072

研究課題名（和文） 結び目の多重値モース理論とその応用

研究課題名（英文） Multi-valued Morse theory for knots and its applications

研究代表者

合田 洋 (GODA HIROSHI)

東京農工大学・大学院共生科学技術研究院・教授

研究者番号：60266913

研究成果の概要：

結び目補空間の多重値モース理論に付随するヘガード分解が誘導するチェイン複体と本来の Novikov 複体がチェインホモトピー同値であることを証明し、このヘガード分解を使ったトーシオンおよびゼータ関数の計算方法を確立した。Homology cylinder という概念の結び目理論における対応物が Homological fibered knot であるということを示した。Homology cylinder に対して定義されたトーシオンを利用して、結び目がファイバー結び目になる為の障害定理を作った。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,100,000	360,000	2,460,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分トポロジ -

1. 研究開始当初の背景

デー手術とは三次元多様体に含まれる結び目の近傍をいったん摘出し、違った形で埋め直すことによって、元の多様体とは異なる三次元多様体を作り出す操作である。この埋め直し方は、絡み目の成分とそれに付随する有理数によって表わされる。特に三次元球面内の絡み目にデー手術を施すことにより、任意の向き付け可能三次元多様体を得られるという事実から、三次元多様体をデー手術の言葉、すなわち、三次元球面内の絡み目とその成分に付随する有理数 r で表すこと

が可能である。当時、広島大学の寺垣内氏と共同で、レンズ空間を生む結び目について主に結び目種数の観点から考察し、

- (1) デー手術でレンズ空間を生む結び目のうち、種数が1のものは三葉結び目に限る。
- (2) 結び目種数が $g(K)$ の結び目 K 上のデー手術でレンズ空間が生まれたとする。このとき、 $|r| < 12g(K) - 6$ という不等式が成立する。

という結果を得ていた。更に、当時知られていたレンズ空間を生む双曲的結び目を全て

調べあげ、それらは、ファイバー結び目であり、トンネル数は1、種数は5以上、生じるレンズ空間の基本群の位数は18以上、 $2g(K)+7 < |r| < 4g(K)$ 、という予想をたてた。

これらの予想に対して、当時 Ozsvath-Szabo によって開発されたヘガードフロアホモロジーがかなり有効であることがわかりつつあった。具体的には、Kronheimer-Mrowka-Ozsvath-Szabo の4人によって、 $2g(K) < |r|$ であることが証明され、Rasmussen によって $|r| < 4g(K)+4$ となるところまで証明された。

これに対し、私は当時までに研究を進めていた結び目補空間の Novikov 複体に対するトーシヨンの研究をさらに深め、特に応用として上記の予想等に寄与しようと考えていた。

さらにこの Novikov 複体に対するトーシヨンのある分解定理は、写像類群や有限型不変量の研究の為に導入された Homology cylinder に対するトーシヨンの分解定理との類似性があることに注目していた。

2. 研究の目的

結び目、絡み目に対する多重値モース理論を使って、

- (1) レンズ空間を生む結び目、絡み目上のデーン手術に関する研究
 - (2) 結び目、絡み目補空間の Reidemeister トーシヨン、特に Novikov 複体に対するトーシヨンの振る舞いの研究
- を行うことを目的とした。

3. 研究の方法

結び目、絡み目補空間の Novikov 複体に対する Reidemeister トーシヨンおよびゼータ関数を、多重値モース理論に付随するヘガード分解を使って組み合わせ的に計算を行い、その数値実験の結果をもとにデーン手術の問題への応用を企画した。この計算の補助手段として Mathematica という数式処理システムを使った。

フランス、ナント大学の Pajitnov 教授は Novikov 複体に対するホモロジーや Reidemeister トーシヨンを長年にわたって研究されている。一方で、私自身は結び目、絡み目補空間の位相幾何学的構造を長年研究してきた。そこで、研究期間の間数回にわたってナント大学に出向き、専門的知識の交換や研究打ち合わせを行った。

また研究期間の半ばで、そこまでの研究結果のレビューを受けるためにフランス、ツールーズ、ポーランド、ベドゥローおよび大阪市立大学で行われた国際研究集会に参加し研究発表を行った。

従来、Homology cylinder に対して定義されていたトーシヨンを結び目、絡み目の補空

間に適用するには、Homology cylinder の結び目理論での解釈が必要となった。そこで、結び目、絡み目に特化したホモロジー論を再度勉強した。そしてどういった結び目がその補空間に Homology cylinder の構造を持つかを解明できた後は、その性質をもつ結び目を簡単なものから具体的に調べ、それらの具体的計算を元に考察を重ねた。ここでも Mathematica を計算の補助手段として利用した。

4. 研究成果

上記の数値実験を行う過程で、それらは Novikov 複体に対する Reidemeister トーシヨンおよびゼータ関数に計算結果は一致するものの、それがどの程度深いものか、すなわち、ホモロジー的に一致するのか、それともホモトピー的に一致するのかという問題が見出された。これについて、ホモトピー的に、つまりチェインホモトピー同値で一致しているという結果を得た。この結果を具体的計算例と合わせて論文としてまとめ (Pajitnov 氏、広島大学の松田氏と共著)、現在投稿中である。この結果より、Novikov 複体に対するねじれゼータ関数の具体的計算の方法への道が開けた。

実際にこの結果に基づいてねじれゼータ関数の具体的計算を試みた。多重値モース理論に付随するヘガード分解を使った Novikov 複体に対するねじれ Reidemeister トーシヨンの計算には成功したが、そこで使う基本群の非可換表現が、ねじれゼータ関数の計算の際に必要な写像トーラスの基本群の表現に伸びるものが見つけれず研究期間が終了した。可換表現の場合は自然にその表現が伸びるのでこの計算は成功した。これらの成果は[雑誌論文] にその一部を、残りは現在論文作成中である。

一方で、その間に当時アメリカのプリンストン大学に在籍していた Ni と Juhasz によって上述の予想「レンズ空間を生む結び目はファイバー結び目に限る」が肯定的に解決されてしまった。彼らの手法は、当時開発された Ozsvath-Szabo によるヘガードフロアホモロジーの理論を多重値モース理論に付随するヘガード分解に適応したものであった。これを現在では sutured フロアホモロジーと呼ぶ。その他、上述の予想をもとに様々な研究者によって、レンズ空間を生むデーン手術に関する研究が著しく進展した。

一方で、私は東京工業大学の逆井氏と共同で、写像類群や有限型不変量の研究において導入された Homology cylinder という概念が、結び目理論ではどのように解釈できるかという問題を解決した。具体的には、Homological fibered knot という概念を導入し、それが Homology cylinder の対応物

であることを証明した。そして元来 Homology cylinder に対する Reidemeister トーションとして定義されていたトーションを結び目補空間のトーションとして見直し、結び目がファイバー結び目になる為の障害定理を証明した。

上述のように Homology cylinder に対するこのトーションはある分解定理を持っていた。この分解定理を結び目に対するトーションの分解定理に解釈し直し、それぞれが何を意味するかを解明した。さらに多重値モース理論に付随するヘガード分解のヘガード種数(これはハンドル数と呼ばれる)の中西指数による評価式を得、Homological fibered knot でありながらハンドル数が任意に高い結び目が存在することを示した。

この結び目に対するトーションはその定義から sutured フロアホモロジーとの関連が想像されたが、最近、Friedl, Juhasz, Rasmussen といった数学者達によって、sutured フロアホモロジーのオイラー数をとるとこのトーションが得られることがわかった。

これらの研究によって、写像類群や有限型不変量の研究にフロアホモロジーの理論が応用できるのではないかという展望が拓けた。現在では、私は Homological fibered knot に sutured フロアホモロジーを適用することで、Homology cylinder の様々な構造の解析、さらには写像類群や有限型不変量の研究への応用が行えるのではないかと考え研究を進めている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

Hiroshi Goda, Andrei Pajitnov, Dynamics of gradient flows in the half-transversal Morse theory, Proceedings of the Japan Academy, Ser.A, 85, 6-10, 2009, 査読有。

Hiroshi Goda, Some estimates of the Morse-Novikov numbers for knots and links, Series on Knots and Everything, 40, 35-42, 2007, 査読有。

Hiroshi Goda, Makiko Ishiwata, A classification of Seifert surfaces of some pretzel links, Kobe Journal of Mathematics, 23, 11-28, 2006, 査読有。

[学会発表](計14件)

倉田洋, Homological fibered knots and the Nakanishi index, 研究集会「Intelligence of Low dimensional Topology」兼「拡大 KOOK セミナー」,

2008年10月7日, 大阪市立大学。

Hiroshi Goda, Homology cylinders in knot theory, Seminaire de Topologie, Geometrie et Algebr, 2008年9月24日, Nantes, France。

倉田洋, A fibering obstruction using the Magnus representation, 研究集会トポロジーとコンピュータ 2008, 2008年8月28日, 東京工業大学。

Hiroshi Goda, Morse-Novikov theory, Heegaard splitting, and closed orbits of gradient flows, Seminaire d'Algebre et de Topologie, 2007年9月13日, Nantes, France。

Hiroshi Goda, Morse-Novikov theory, Heegaard splittings, and closed orbits of gradient flows, Braids, groups and manifolds in Toulouse, 2007年9月7日, Toulouse, France。

Hiroshi Goda, Circle-valued Morse maps, Reidemeister torsions, and sutured manifold theory, Algebraic Topology: Old and New, 2007年6月18日, Bedlewo, Poland。

倉田洋, ねじれ Alexander 不変量とその周辺, 金沢大学談話会, 2007年6月13日, 金沢大学。

倉田洋, Circle-valued Morse maps, Reidemeister torsions, and sutured manifold theory, 日本数学会(特別講演), 2007年3月30日, 埼玉大学。

Hiroshi Goda, Lefschetz zeta function and some flows associated with circle valued Morse maps on 3-manifolds, The 3rd East Asian School of Knots, Links and Related topics, 2007年2月6日, 大阪市立大学。

倉田洋, Some estimates of Morse-Novikov number of knots and links, 研究集会「Intelligence of Low Dimensional Topology」, 2006年7月25日, 広島大学。

倉田洋, Counting closed orbits and flow lines via Heegaard splittings, トポロジー・幾何セミナー, 2006年7月4日, 広島大学。

倉田洋, Counting closed orbits and flow lines via Heegaard splittings, トポロジー・金曜セミナー, 2006年6月2日, 九州大学。

倉田洋, 結び目に対する多重値モース理論について, 低次元トポロジーセミナー, 2006年5月23日, 大阪大学。

倉田洋, Counting closed orbits and flow lines via Heegaard splittings, トポロジー・火曜セミナー, 2006年4月25日, 東京大学。

〔図書〕(計1件)

北野晃朗, 合田洋, 森藤孝之, 日本数学会,
ねじれ Alexander 不変量 2006 ,183 ページ .

6 . 研究組織

(1)研究代表者

合田 洋 (GODA HIROSHI)

東京農工大学・大学院共生科学技術研究
院・教授

研究者番号 : 60266913

(2)研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし