

平成22年5月11日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2009

課題番号：18540074

研究課題名（和文）可積分系と関わる曲線および曲面をめぐる総合的研究

研究課題名（英文）General study on curves and surfaces related to integrable systems

研究代表者

藤岡 敦（FUJIOKA ATSUSHI）

一橋大学・大学院経済学研究科・准教授

研究者番号：30293335

研究成果の概要（和文）：平均曲率ベクトルの大きさを保ちながら等長的に変形可能な4次元空間形内の曲面について調べ、3次元空間形内の曲面とは見なされない例を構成した。中心アファイン計量の面積積分の停留曲面として得られる中心アファイン極小曲面について新しい例をみつけた他、自己合同中心写像をもつ中心アファイン曲面についても考察した。曲率が可積分系に現れる微分方程式に従う曲線の運動のハミルトン系としての特徴付けについて調べた。

研究成果の概要（英文）：I studied surfaces in the four dimensional space forms admitting isometric deformations preserving the length of the mean curvature vector and constructed examples not considered as surfaces in the three dimensional space forms. I studied centroaffine minimal surfaces, which are defined as extremal surfaces of the area integral of the centroaffine metric, and obtained new examples, and considered centroaffine surfaces with self congruent center map. I studied characterization as Hamiltonian systems of motions of curves whose curvature obeys differential equations appeared in integrable systems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	720,000	4,020,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何、曲線、曲面、可積分系

1. 研究開始当初の背景

微分幾何学者達の関心を引く幾何学的対象を記述する微分方程式がしばしば可積分系理論に現れるものとなることは、ここ20年近くの活発な研究で広く認識されてきた

ことである。特にサイン・ゴールドン方程式により記述される平均曲率一定曲面の研究が示すように、曲面論においては可積分系理論の手法を取り入れることは非常に有効なばかりか、多くの更なる興味深い問題を

生み出す。中でも研究代表者は平均曲率一定曲面の自然な一般化であるボンネ曲面（平均曲率を保ちながら等長的に変形できる曲面）、調和逆平均曲率曲面（平均曲率の逆数が自然な計量に関し調和な曲面）を始め、負定曲率曲面、アフライン球面の自然な一般化であるピアンキ曲面、中心アフライン極小曲面の他、4次元空間形内のボンネ曲面を研究対象としてきた。

2. 研究の目的

従来まではボンネ曲面、調和逆平均曲率曲面、ピアンキ曲面についてはユークリッド幾何的観点から研究が行われてきたが、ウィルモア曲面、共形曲率線座標をもつ曲面についての共形幾何的観点からの最近の研究に触れる中で、これらを言わば相似幾何的観点から扱うことが見通しの良い理解を与える可能性を見出した。まずはこの観察を更に発展させ、「曲面の相似幾何学」とでもよぶべきものを構築すべきであろうと考える。また研究代表者による負曲率曲面に対する一般化チェビシェフ網とよばれる概念が、ピアンキ曲面を空間形の曲面の場合に一般化して考察することを通して、共形曲率線座標をもつ曲面と同様の豊かな幾何をもつことが特に正曲率空間形内の場合に期待されることが分かってきたが、背後にある本質的な幾何をより明確にさせることは今後の課題である。更に元来は変分法的に定義された中心アフライン極小曲面の可積分系理論的な取り扱いは余りなされていない。このような可積分系と関わる幾何に現れる様々な対象を総合的に扱っていくことが一つの目的である。

一方、これらの対象は離散化とよばれる手続きにより、その本質的構造が単純で美しい規則に基づくことを教えてくれる。例えば、平均値の性質から示される調和関数に対する最大値原理が良い例である。しかしながら、可積分系理論と関わる幾何的对象が離散化も込めて研究の対象とされたのは決して古いことではなく、最近になり漸くこのような分野は単に「離散微分幾何」とよばれるようになってきた。また昨今の計算機技術の高度な発達により、離散微分幾何は今後大きく発展していく分野であると期待されるが、曲面の場合のみならず、曲線の場合においてもよく理解されているとは言いがたく今後の研究の対象として行きたい。

3. 研究の方法

可積分系理論を微分幾何学に適用して研究を進めている数学者達が主催する研究集会に参加し、研究代表者自身の研究成果を発表する機会ともする他、関連する分野で先駆的な業績を挙げられている数学者達にも直接会い、資料収集、各種調査、研究打ち合わせ、

研究の成果発表を行う。更に、微分幾何学に関係する図書の購入等により研究課題を遂行する。

4. 研究成果

(1) 4次元空間形内の平均曲率ベクトルの大きさを保ちながら等長的に変形可能な曲面について、以前チェンとヤウによる簡約定理の一般化を得ていたが、簡約という言葉が示すように、そこに現れるものは法束が平坦で本質的には3次元空間形内の曲面とみなせるものであった。そこでこの研究を更に発展させ、双曲型空間形内の平坦でない法束をもつものを構成した。このような例を含む曲面族の可積分系理論との関わりについて3次元空間形内の曲面の場合について知られているようなものを期待したい。

(2) 中心アフライン極小曲面は中心アフラインチェビシェフ作用素のトレースが消える曲面として特徴付けられるが、従来知られていた例は中心アフラインチェビシェフ作用素自身が消えているため本質的には新しくない。そこで、中心アフラインチェビシェフ作用素が半単純でない中心アフライン極小曲面について調べ、中心アフライン計量の曲率が一定のものを分類する中で新しい例を発見し、中心アフライン計量の曲率およびピック関数が一定の中心アフライン極小曲面の分類も行った。また、自己合同中心写像をもつ中心アフライン曲面と中心アフラインチェビシェフ作用素が消える曲面との関係についても調べた。中心アフライン曲面は固有アフライン球面の可積分な意味での一般化ともなることが知られているため、今後の発展に期待したい。

(3) 曲率が可積分系に現れる微分方程式に従う曲線の運動のハミルトン系としての特徴付けについて、特に複素双曲線上の曲線および複素等積アフライン曲線の運動について調べた。より具体的には、複素双曲線上の閉曲線のなす空間にシンプレクティック構造を入れ、ハミルトン流に沿って曲率が高次バーガーズ方程式に従うハミルトン関数を定義し、更に、このハミルトン関数を不変にするハミルトン作用を扱った他、上述の空間のリーマン幾何的性質についても考察した。また、閉じた複素等積アフライン曲線のなす空間にプレシンプレクティック構造を入れ、ハミルトン流に沿って曲率が高次 KdV 方程式に従うハミルトン関数を定義した他、複素平面上の閉曲線のなす空間

との間にプレシンプレクティブ写像を定義し、これがミウラ変換を誘導することを示した他、AKNS系を用いて上述の無限次元多様体上の流れを具体的に構成することも行った。今後はその他の例や多重ハミルトン構造についても考察していきたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

- ① Atsushi Fujioka, Centroaffine minimal surfaces whose centroaffine curvature and Pick function are constants, 査読有, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 365 (2010), 694-700.
- ② Atsushi Fujioka and Takashi Kurose, Hamiltonian formalism for the higher KdV flows on the space of closed complex equicentroaffine curves, 査読有, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 7 (2010), 165-175.
- ③ Atsushi Fujioka, Centroaffine minimal surfaces with non-semisimple centroaffine Tchebychev operator, 査読有, Results in Mathematics, 56 (2009), 177-195.
- ④ Atsushi Fujioka and Takashi Kurose, Geometry of the space of closed curves in the complex hyperbola, 査読有, The Kyushu Journal of Mathematics, 63 (2009), 161-165.
- ⑤ Atsushi Fujioka and Takashi Kurose, Motions of curves in the complex hyperbola and the Burgers hierarchy, 査読有, Osaka Journal of Mathematics, 45 (2008), 1057-1065.
- ⑥ Atsushi Fujioka and Jun-ichi Inoguchi, Timelike surfaces with harmonic inverse mean curvature, Advanced Studies in Pure Mathematics, 査読有, 51 (2008), 113-141.
- ⑦ Atsushi Fujioka, Bonnet surfaces with non-flat normal bundle in the hyperbolic four-space, Far East Journal of Mathematical Sciences,

査読有, 30 (2008), 381-387.

⑧ Atsushi Fujioka and Jun-ichi Inoguchi, Deformations of surfaces preserving conformal or similarity invariants, Progress in Mathematics, 査読有, 252 (2007), 53-67.

[学会発表] (計9件)

- ① 藤岡敦、変分問題とアファイン微分幾何、沖縄高専数学セミナー、2010年1月29日、沖縄工業高等専門学校。
- ② 藤岡敦、中心アファイン極小曲面、福岡大学微分幾何研究会、2009年11月20日、福岡大学。
- ③ 藤岡敦、Centroaffine minimal surfaces、統計多様体の幾何学とその周辺、特異点論セミナー、2009年11月6日、北海道大学。
- ④ 藤岡敦、等積中心アファイン曲線とAKNS系、福岡大学応用数学教室談話会、2009年2月26日、福岡大学。
- ⑤ 藤岡敦、複素双曲線上の閉曲線のなす空間、多様体上の幾何構造とその応用、2008年3月8日、名城大学。
- ⑥ 藤岡敦、複素双曲線上の曲線の運動、多様体上の微分方程式、2007年12月10日、いしかわシティカレッジ。
- ⑦ 藤岡敦、複素双曲線上の曲線の運動、部分多様体論・湯沢2007、2007年11月22日、湯沢グランドホテル。
- ⑧ 藤岡敦、複素双曲線上の曲線の運動と離散化、熊本大学数学談話会、2007年10月17日、熊本大学。
- ⑨ 藤岡敦、複素双曲線上の曲線の運動と離散化、福岡微分幾何研究会、2007年2月4日、福岡大学。

[その他]
ホームページ等

http://www.econ.hit-u.ac.jp/~koho/jpn/introduce/professor/MA_fujioka.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤岡 敦 (FUJIOKA ATSUSHI)
一橋大学・大学院経済学研究科・准教授
研究者番号：30293335

(2)研究分担者
(なし)

(3)連携研究者
(なし)