

平成 21 年 5 月 25 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540083

研究課題名（和文） 写像類群と 4 次元多様体のトポロジー

研究課題名（英文） Topology of 4-manifolds and mapping class groups

研究代表者

遠藤 久顕 (ENDO HISAKI)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：20323777

研究成果の概要：4次元の幾何学的対象である4次元多様体を、曲面から曲面への写像の集合から構成される写像類群を用いて研究した。特に、無数の曲面が集まって構成されているような4次元多様体を詳しく調べ、今までに知られていない性質を持つ具体例を多数構成した。また、曲面の間の写像を変えたときに対応する4次元多様体がどのように変わるかを明らかにした。さらに、写像類群自体の性質もいくつか解明した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,000,000	0	1,000,000
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	570,000	3,470,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：4次元多様体、写像類群、符号数、Lefschetz ファイバー空間、Meyer コサイクル、微分構造、擬準同型、超楕円性

## 1. 研究開始当初の背景

4次元多様体のトポロジーは1980年代初頭のFreedmanとDonaldsonによる革命的な研究により多くの知見を得たが、微分可能な多様体の完全な分類には至っていない。

Lefschetz ファイバー空間はもともとS. Lefschetz が射影代数多様体のトポロジーを考察した際に導入したLefschetz pencil というものに由来する概念であり、A. Kas, B. Moishezon や松本幸夫氏(学習院大学)によって楕円曲面のトポロジーの研究に応用され、その有用性が認識された。1998年に現

れたDonaldsonとGompfの研究は4次元シンプレクティック多様体とLefschetz ファイバー空間の密接な関係を見出した画期的なものであった。この結果を受けて種数2以上のLefschetz ファイバー空間の分類や不変量の構成の研究が本格化した。

研究代表者は1996年頃から曲面上の曲面束という特殊な4次元多様体に興味をもち、特にMeyerの符号数コサイクルを用いて詳しく調べていた。その副産物として超楕円的なLefschetz ファイバー空間の符号数が特異ファイバーに局所化する現象を捉えていた

が、この時期に河澄響矢氏(東京大学)の主催する研究集会において森藤孝之氏(東京農工大学)の講演を聴く機会に恵まれ、それに触発されて Lefschetz 型の特異ファイバーの局所符号数を決定した。同時期に、足利正氏(東北学院大学)と荒川達也氏(群馬高専)による超楕円曲線束に対する Horikawa 指数の研究や、Donaldson と Gompf による上記の研究が現れたこともあり、研究代表者は特異ファイバーをもつ4次元ファイバー空間の研究へと自然に導かれた。それ以降、Lefschetz ファイバー空間の符号数や構成法に関する研究を進め、関係子に付随する符号数についての永見誠二氏(摂南大学非常勤講師)との共同研究や、写像類群の有界コホモロジーへの応用を行った D. Kotschick 氏(ミュンヘン大学)との共同研究など、いくつかの成果を得た。

## 2. 研究の目的

本研究課題の大きな目的は、シンプレクティック構造を受容するような4次元多様体のトポロジーを解明することであり、より具体的には、写像類群の関係子を介して Lefschetz ファイバー空間の分類と不変量の構成を実行することである。研究期間内に取り組むことが可能で解決しうる問題として具体的な目標に設定したものは次の2つである。

(1) 超楕円的な Lefschetz ファイバー空間の新しい具体例を構成し、その性質を詳しく調べる。また、超楕円的な Lefschetz ファイバー空間の分類へ向けたプログラムを立てること：

任意の有限表示群は Lefschetz ファイバー空間の基本群として実現される。すなわち、すべての Lefschetz ファイバー空間の分類は原理的に不可能である。そこで、超楕円性という良い仮定の下で分類を試みようという目標を立てた。

(2) Torelli 群の情報を持つような Lefschetz ファイバー空間の新しい不変量を見出すこと。また、Lefschetz ファイバー空間の符号数に関する従来の諸研究の相互関係を明らかにすること：

Lefschetz ファイバー空間の符号数は各特異ファイバーの周りのモノドロミーの Siegel モジュラー群での値のみで決まっている。そこで Torelli 群の情報を持つような不変量を構成し、分離型の特異ファイバーの本数などへの応用を目標とした。また、Ozbagci, Smith, 永見氏と研究代表者らによる符号数公式は互いの関係が明示的には与えられていないので、その解明も目標とした。つまり、符号数を超えることと符号数を掘り下げることがを並行して探求することにした。

## 3. 研究の方法

現在、Lefschetz ファイバー空間は様々な方法で研究されている。例えば、Donaldson, Seidel, Smith, Auroux らによるシンプレクティック幾何によるアプローチや、松本幸夫氏, Korkmaz, Ozbagci, Akbulut らによる位相的、組み合わせ的なアプローチなどがある。研究代表者の方法は後者に属するものであり、具体例を扱う際や分類を実行する際に有効であることが多い。第4項に述べる研究成果を得る過程で実際に用いた方法は次のようなものである。

(1) 写像類群のコサイクル、表現、コホモロジーなどの代数的な概念を用いることにより、Lefschetz ファイバー空間の不変量の研究を行う。また、写像類群の関係子进行操作することにより、Lefschetz ファイバー空間の具体例を構成する。

(2) 4次元多様体論における様々な道具、特に Kirby 計算や Seiberg-Witten 不変量などを用いて Lefschetz ファイバー空間の微分同相類に関する研究を行う。また、状況によってはシンプレクティック幾何における研究結果なども用いる。

## 4. 研究成果

(1) 1970年代末の Chakiris による種数2のペンスルのモノドロミーに関する先駆的な研究の一部を、トポロジーの観点から再構成し一般化した。具体的には、分離型の特異ファイバーをもつような超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の新しい例をすべての種数において構成し、Cadavid-Korkmaz の例などの関係を明らかにした。また、互いに同相だが微分同相でないような Lefschetz ファイバー空間の新しい具体例を、4以上のすべての偶種数において構成した。さらに、有理曲面とのファイバー和をとることによってこれらが互いに微分同相となることを示した。種数2の場合には、松本幸夫氏による例が Chakiris の例のファイバー和成分として自然に現れることを観察した。

従来、分離型の特異ファイバーをもつような超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の具体例はあまり知られておらず、本研究によってそのような例が与えられたことは超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の研究に進展をもたらすものと期待している。互いに同相だが微分同相でないような Lefschetz ファイバー空間の新しい具体例も、松本幸夫氏と Fuller、および研究代表者による同様の例に続く第2の具体例であり、かつ分離型の特異ファイバーをもつ初めての例である。

(2) D. Kotschick 氏との共同研究では、写像類群上の擬準同型に関する研究を行った。具体的には、種数2以上の閉曲面の写像類群の無限位数の原始的な可約元であって、絶対値

の等しい正負の冪が互いに共役ではなく、かつ任意の冪の torsion length が有界であるものの存在を示した。結果として、Polterovich-Rudnick により示されたトラスの写像類群における擬準同型による分離定理が、種数 2 以上の場合には成立しないことがわかった。

種数 2 以上の閉曲面の写像類群においても擬アノソフ元のみを対象を限ればトラスの場合と同様の擬準同型による分離定理の成り立つことが、Calegari-Fujiwara によってほぼ同時期に示されている。本研究は彼らの研究と相補的な関係にあり、写像類群の双曲的な側面とそうでない側面の対比と見ることもでき興味深い。

(3) Y. Gurtas 氏(デポー大学・セントルイス大学)との共同研究では、写像類群の lantern 関係式と Fintushel-Stern による 4 次元多様体の有理ブローダウンとの新たな関係を見出した。実際には、Lefschetz ファイバー空間のモノドロミーを lantern 関係式によって書き換えると、対応する Lefschetz ファイバー空間は元の空間の有理ブローダウンに変化することがわかった。閉曲面の周期 3 の周期写像を用いることによりそのような具体例を示し、関連してエキゾチックな 4 次元多様体などを構成できることも明らかになった。

本研究のプレプリントの発表に前後して、安井弘一氏(大阪大学・日本学術振興会特別研究員 PD)や T. Mark 氏(ヴァージニア大学)等から感想や意見が寄せられ、本研究を拡張・一般化する共同研究がすでに始まっている。

(4) 足利正氏と共同で執筆した論説の英訳を出版した。この論説はリーマン面の退化に関する最近の諸研究を解説したものであり、足利氏が主に代数幾何的な側面から、研究代表者が位相幾何的な側面からいくつかの話題を論じている。

論説の中でも第 2 節と第 3 節において解説した符号数の局所化の話題は、日本の代数幾何・位相幾何の研究者が育んできた興味深い話題であり、その小史を海外の研究者に向けて紹介したことは意味のあることと思われる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Hisaaki Endo, A generalization of Chakiris' fibrations, in "Groups of Diffeomorphisms", Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 52, pp. 251—282, 2008. 査読あり.

- ② Hisaaki Endo and Dieter Kotschick, Failure of separation by quasi-homomorphism in mapping class groups, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 135, pp. 2747—2750, 2007. 査読あり.

- ③ Tadashi Ashikaga and Hisaaki Endo, Various aspects of degenerate families of Riemann surfaces, Sugaku Expositions, Vol. 19, pp. 171—196, 2006. 査読あり.

[学会発表] (計 5 件)

- ① 遠藤久顕, Lantern relations and rational blowdowns, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics, 2009年3月9—12日(発表日:3月11日), 広島大学理学部
- ② 遠藤久顕, Lefschetz ファイバー空間の微分構造とその安定化, 京大微分トポロジーセミナー, 2007年4月22日, 京都大学理学部
- ③ 遠藤久顕, Lefschetz ファイバー空間と 4次元多様体の微分構造, 21世紀 COE プログラム「究極と統合の新しい基礎科学」2006年度冬の学校, 2007年2月18—20日(発表日:2月19日), 六甲山 YMCA
- ④ 遠藤久顕, Chakiris の 1/19 定理への位相的なアプローチについて, 東工大トポロジーセミナー, 2006年12月6日, 東京工業大学西8号館
- ⑤ Hisaaki Endo, A generalization of Chakiris' fibrations, Symposium on Groups of Diffeomorphisms 2006, September 11—15 (lecture given on 14), 2006, University of Tokyo

[その他] (計 3 件)

- ① 大阪大学研究者総覧の論文一覧: <http://www.dma.jim.osaka-u.ac.jp/kg-porta/asp/RY0011L.asp?UNO=10195&flg=&seq=42541>
- ② lantern 関係式と有理ブローダウンについての Y. Gurtas 氏との共同研究の成果に関する資料: Hisaaki Endo and Yusuf Z. Gurtas, Lantern relations and rational blowdowns, arXiv:0808.0386: <http://arxiv.org/abs/0808.0386>
- ③ 周期 3 の周期写像のデーモン・ツイスト表示についての Y. Gurtas 氏との共同研究の成果に関する資料: Hisaaki Endo and Yusuf Z. Gurtas, Positive Dehn twist expression for a  $\mathbb{Z}_3$  action on  $\mathbb{Y}\Sigma_g$ , arXiv:0808.0752, <http://arxiv.org/abs/0808.0752>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

遠藤 久顕 (ENDO HISAAKI)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：20323777

### (2) 研究分担者

菊池 和徳 (KIKUCHI KAZUNORI)

大阪大学・大学院理学研究科・講師

研究者番号：40252572

### (3) 連携研究者

なし

### (4) 研究協力者

GURTAS, YUSUF Z.

デポー大学・助教授

DePauw Univ., Assistant Professor

安井 弘一 (YASUI KOUICHI)

大阪大学・大学院理学研究科・博士課程

日本学術振興会特別研究員 PD

門田 直之 (MONDEN NAOYUKI)

大阪大学・大学院理学研究科・博士課程