

平成 22 年 3 月 5 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2009

課題番号：18540092

研究課題名 (和文) 重心配置空間のホモトピー論への応用

研究課題名 (英文) Applications of centers of mass configuration spaces to homotopy theory

研究代表者

神山 靖彦 (KAMIYAMA YASUHIKO)

琉球大学・理学部・教授

研究者番号：10244287

研究成果の概要 (和文) : 2 つの図形の上に連続写像がどの位あるか調べる幾何学をホモトピー論という。従来のホモトピー論の諸問題は、問題ごとにアドホックな方法で解決されてきた。本研究では重心配置空間という空間を定義し、その性質について予想を提示した。この予想が解決されれば、既知の諸定理に統一的な別証明を与えることができ、同時に未解決問題も解決することを解明した。

本研究のメリットは以下の点にある。ユークリッド空間内の何枚かの平面たちの補集合は原理的に計算可能である。重心配置空間はこのような補集合の一種なので、連続写像を作るという従来の方法よりもはるかにアプローチしやすい。

研究成果の概要 (英文) : Homotopy theory is a topology which studies continuous maps between two spaces. Traditionally, problems in homotopy theory have been solved by ad hoc methods. In the present research, I defined the “centers of mass” configuration spaces and posed a conjecture about its property. I elucidated that if our conjecture was proved, then not only many known results are reproved in an integral way, but also we can prove unsolved problems.

The merit of our research is as follows. The complement of hyperplanes in the Euclidean space is a computable object. Since our configuration space is a kind of such a complement, our conjecture is far more accessible than the traditional way to construct continuous maps.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,200,000	690,000	3,890,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：重心配置空間、クモの巣装置、モーメント角複体

1. 研究開始当初の背景

(1) ホモトピー論は2つの図形間に連続写像がどの位あるか調べる幾何学である。最もよく研究されているのは、定義域の図形が一般次元の球面のときである。この場合、連続写像がどの位あるかを表すホモトピー群を定義することは非常に簡単である。

(2) しかしながら、このホモトピー群を計算することは非常に難しい。値域の図形が一般次元の球面と仮定しても、僅かなことしか分かっていない。

(3) ホモトピー群の計算は1930年代には始められ、種々の数学者により部分的な結果が得られてきた。しかし、それらの証明は、考察する問題に応じて巧妙な連続写像を構成するなど、アドホックなものであった。この統一的な理論展開が難しい事情が、ホモトピー論の進展を阻んでいる。

(4) ホモトピー論にはコーエン・ムーア・ナイゼンドルファー予想といった未解決問題も多く残されているが、一般に連続写像を作ることは簡単なことではないので、どうアプローチしてよいかさえ不明である。

2. 研究の目的

(1) 「研究開始当初の背景」(3)で述べたように、ホモトピー論の諸定理はアドホックな方法により解決されてきた。本研究の目的は、1つの議論の流れを用意し、これらの定理をその流れから統一的に再証明することである。更にその流れから、未解決問題へのアプローチを読み取ることも目的である。

(2) その流れの鍵となるのが、研究課題名にある「重心配置空間」である。従来のホモトピー論の幾つかの定理は、配置空間というものを使って証明されてきた。ここで、平面上に相異なる幾つかの電荷を配置するときの配置全体のなす空間を配置空間という。

(3) しかし配置空間をホモトピー論に応用することは既に限界に近い。そこで本研究では、従来の配置空間を精密化した重心配置空間を発見し考察するわけである。

(4) 実際に研究したいのは以下の通りである。

- ① 重心配置空間を定義すること。
- ② 重心配置空間の性質に関する予想を提示すること。更に、従来のホモトピー論の諸定理がその予想から統一的に導かれる

ことを証明すること。

③ ②の予想に関するアプローチを考察すること。

④ 平面上の電荷の配置空間以外にも配置空間は色々ある。例えば、ロボットを用意したとき、その姿勢全体はロボット動作の配置空間という。この配置空間を記述する量として「位相的複雑さ」というものがある。

この位相的複雑さはロボット動作設計を位相的によく反映しているため重要であるが、計算は殆ど不可能である。例えば与えられた空間が実射影空間のとき、位相的複雑さはユークリッド空間への埋め込み可能な最小次元と関連する。この次元は決定からほど遠いことから位相的複雑さの難しさが分かる。

さて、配置空間に関連するあるロボットについて、位相的複雑さを研究することを問題とする。

⑤ ④の配置空間を、トーリックトポロジーといった別の幾何学との関連から調べること。

3. 研究の方法

(1) まず重心配置空間をどう定義するかであるが、従来の配置空間は複素平面の直積から何枚かの超平面を除いた、いわゆる超平面配置の補空間と解釈されることに注意する。そこで、重心配置空間もより多くの超平面を除いた補空間と定義してはどうかという考えに至った。

(2) 次に重心配置空間の性質をどのように述べるかが問題である。重心配置空間はホモトピー論の情報を多く持っているだろうが、その性質をホモトピー論の言葉で述べてしまったら結局従来のホモトピー論と同種の問題になってしまい、手が出なくなる。

(3) そこで重心配置空間の性質はホモロジーの言葉で述べてはどうかと考えた。一般に図形が与えられたとき、ホモロジーの決定はホモトピーの決定よりはるかに容易である。更に、(4)で述べるようにコンピュータ計算も可能なことがある。この着想の利点は、ホモトピー論を手が出そうな距離にまで落としたことである。

(4) 超平面配置の補空間の研究にコンピュータが用いられることはよく知られている。実際、補空間のホモロジーはオーリック・ソロモン代数と同型であることが知られており、

このオーリック・ソロモン代数はコンピュータにより計算できるからである。更に現在ではサルベッチ複体という、オーリック・ソロモン代数より効率のよい道具も知られており、超平面たちが具体的に与えられた場合には、計算はかなり行うことが可能である。

(5) 研究の目的(4)④に関連して、どのようなロボットから生じる配置空間を考察するのが妥当であるかが問題である。1つ考えられるのはクモの巣装置である。これはパワーショベルの腕を幾つか用意し、腕の一端は多面体の頂点上の固定し、もう一端は一斉に接合することにより得られるロボットである。

(6) クモの巣装置が妥当だと思われる理由は幾つかある。

① 多角形のモジュライ空間は1990年代から世界中で非常に活発に研究されてきた。組み合わせ論的に興味深い対象であるのみならず、シンプレクティック多様体といういい構造を持っているからである。つまり多角形のモジュライ空間は、組み合わせ論、代数トポロジー、トーリクトポロジーといった種々の数学における典型的な例になっているのである。

そして、クモの巣装置は多角形のモジュライ空間の一般化である。これがクモの巣装置が興味深い理由の1つである。

② 研究の目的(4)⑤に関連して、多角形のモジュライ空間がトーリクトポロジーやシンプレクティック幾何の典型的な例であると同様に、クモの巣装置もトーリクトポロジーと密接に関連しているはずであるこれを解明するのも興味深い。(研究成果(2)で述べるが、モーメント角複体というトーリクトポロジーにおける重要な概念であるモーメント角複体の典型的な例であることが解明された。)

4. 研究成果

(1) 重心配置空間という目標とすべき配置空間の構成に成功し、その性質に関する予想を提示した。(雑誌論文⑧)。

2007年12月の京都大学でのCOE国際会議で成果を発表したところ、ギトラー教授、ウー教授といった著名な数学者から論文の請求を受けた。(学会発表②)。

(2) 研究の方法(5)で述べたクモの巣装置の配置空間は、トーリクトポロジーにおける重要な概念であるモーメント角複体の典型的な例となっていることを解明した。(雑誌論文⑥)。

(3) (2)に続いて、モーメント角複体の位相的性質(厳密には1回懸垂すると球面のブーク

に分解すること)を証明した。(雑誌論文⑥)。

主定理は純粋に数学的であり、組み合わせ的な言葉で表現したのであるが、では実際にこの次元の球面は何個生じるかについて決めようとする、手計算で行うのは難しい。研究の方法(4)に似ているが、ここでも具体例はコンピュータにより計算した。

なお、この特別な場合はそれより前に出版した。(雑誌論文③)。

この成果は海外で多くの数学者に興味を持たれている。例えば、2010年11月にカナダで開催される国際会議に招待されている。

(4) (3)の成果は以下の意味で重要である。一般に超平面配置の補空間のホモロジーにはゴレスキー・マクファーソンによる分解が存在する。モーメント角複体は超平面配置の補空間の特別な場合であるが、この場合にはホモロジー分解より強く、1回懸垂すれば空間レベルで分解することになる。

応用として、ゴレスキー・マクファーソンによる分解が証明されているのは常ホモロジーのみであるのに対し、モーメント角複体は一般ホモロジーに対して分解する。

(5) ロボティクスに関連する講演を2006年5月に大阪市立大学で開催されたCOE国際会議で行ったところ、多くの聴衆が興味を持ち、論文の請求や質問をしてきた。同様の講演を、2010年2月にOIST(沖縄科学技術研究基盤整備機構)で開催された第5回日中友好幾何学研究集会でも行った。(学会発表①、④)。

(6) 研究の方法(5)で述べたように、クモの巣装置は固定された多面体に依存する。この多面体が正多角形の場合に、配置空間の位相的複雑さを決定した。(雑誌論文②)。

研究の目的(4)④に述べたように位相的複雑さの決定は困難を極めるので、上記のように多面体を正多角形のような特別な場合に限定するのは仕方ない。それでも位相的複雑さは研究成果(3)と相補的になっている。

つまり、(3)の結果は1回懸垂したらという安定ホモトピー論の範疇での主張である。

一方、空間は懸垂したらコホモロジー環の構造は自明になる。しかし、位相的複雑さの計算にはコホモロジー環の構造が用いられる。つまり、この(6)は非安定ホモトピー論の範疇での主張である。

(7) ある偏微分方程式の解空間をインスタントンのモジュライ空間という。正確には4次元球面上の自己双対接続全体のなす空間をインスタントンのモジュライ空間と呼ぶのである。1980年代にドナルドソンはインスタントンのモジュライ空間の情報を使って、4次元多様体論の新たな研究手法を開拓した。

一方で、インスタントンのモジュライ空間は配置空間やそれと表裏一体であるループ空間としての側面も持っている。例えば、インスタントンのモジュライ空間には、ループ空間特有の性質であるホモロジー作用素が定義される。

このように、インスタントンのモジュライ空間をホモトピー論の視点から研究することは重要で、広く行われている。

この方面で以下の研究成果を上げた。

① インスタントン数が 1 のインスタントンのモジュライ空間のコホモロジー群はよく知られていた。この度、チャウ環を決定した。(雑誌論文⑨)。

代数多様体のチャウ環の計算は最近広く行われているが、この結果はその典型的な例と解釈される。

② インスタントンのモジュライ空間の幾つかのホモトピー群を計算した。(雑誌論文⑩)。

③ インスタントンのモジュライ空間がスピコン構造を持つ必要十分条件を決定した。(雑誌論文⑪)。これは今後 4 次元多様体論に応用が期待される。

(8) 複素数を係数とし、根の重複度に制限を与えた多項式たちのなす空間は重要である。実際、重根を全く持たない多項式のなす空間は、研究の目的(2)で述べた、電荷の配置のなす空間(つまり従来の配置空間)と同一視されるからである。

アーノルドは 1970 年の論文でこの電荷の配置空間のホモロジーを決定しようとした。重根の重複度を減らす方向で数学的帰納法を行うものであった。

しかし完全系列から群を読み取る難しさのため部分的な解答しか得ることができず、大半は未解決とした。

その後電荷の配置については別の方法で解決された。しかし、根の重複度に制限と与えた多項式のなす一般の空間は、その後も未解決であった。

報告者は 2001 年の論文でこの空間のホモトピー型を、あるホモトピーファイバーを使って記述した。従ってこのホモトピーファイバーのホモロジーが計算できれば、アーノルドの未解決問題に完全な解答を与えることになる。

この度、このホモトピーファイバーのホモロジーを完全に決定した。(雑誌論文⑦)。

(9) 一般に無限次元多様体を有限次元多様体でどの程度近似できるかという問題は興味深い。その立場からよく考察されるのが、無限次元多様体として連続写像空間、有限次元多様体として正則写像空間を考えた場合である。この場合は、連続写像空間上のエネ

ルギー汎関数の臨界点(大雑把には極点)が正則写像空間であり、無限次元モース理論がどの程度成立するかという見地からも、近似問題は興味深いのである。

定義域が球面の場合には近似問題にはある程度解決されている。しかし、定義域と値域に複素共役による作用を考えたときの同変写像空間については全く知られていなかった。

この度、球面から複素射影空間への同変写像空間について近似問題を解決した。(雑誌論文⑫)。

この問題は値域をグラスマン多様体、更には代数多様体にするなどで、従来知られた成果の同変版として一般化できる。今後の展望は、この問題をいかに展開するかである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① 神山靖彦、岸本大祐、Spin structures on instanton moduli spaces, *Topology and its Applications*, 査読有、157 巻、2010、35-43。
- ② 神山靖彦、Topological complexity of certain moment-angle complexes, *JP Journal of Geometry and Topology*, 査読有、9 巻、2009、121-128。
- ③ 神山靖彦、The homology of spaces of polynomials of bounded multiplicity, *Geometry and Topology Monographs*, 査読有、13 巻、2008、281-291。
- ④ 神山靖彦、On arachnoid mechanisms formed by concatenation of arc-length parametrized curves, *Kodai Mathematical Journal*, 査読有、31 巻、2008、323-332。
- ⑤ 神山靖彦、The symplectic volume and intersection pairings of the moduli spaces of spatial polygons, *Contemporary Mathematics*, 査読有、460 巻、2008、209-219。
- ⑥ 神山靖彦、佃修一、On the homology of configuration spaces of arachnoid mechanisms, *Houston Journal of Mathematics*, 査読有、34 巻、2008 年、483-499。
- ⑦ 神山靖彦、Spaces of real polynomials with common roots, *Geometry and Topology Monographs*, 査読有、2007 年、10 巻、227-235。
- ⑧ 神山靖彦、Fred Cohen、Configurations and parallelograms associated to centers of mass, *Geometry and Topology Monographs*, 査読有、11 巻、2007、17-32。

- ⑨ 神山靖彦、手塚康誠、The Chow ring of the moduli space of bundles on P^2 with charge 1、Journal of Mathematics of Kyoto University、査読有、47 巻、2007、565-577。
- ⑩ 神山靖彦、The homology of the configuration space of a singular arachnoid mechanisms、JP Journal of Geometry and Topology、査読有、7 巻、2007、385-395。
- ⑪ 神山靖彦、岸本大祐、河野明、佃修一、Samelson products of $SO(3)$ and applications、Glasgow Mathematical Journal、査読有、49 巻、2007、405-409。
- ⑫ 神山靖彦、Remarks on spaces of real rational functions、Rocky Mountain Journal of Mathematics、査読有、37 巻、2007、247-257。
- ⑬ 神山靖彦、佃修一、The configuration space of the n-arms machine in the Euclidean space、Topology and its Applications、査読有、154 巻、2007、1447-1464。

[学会発表] (計 4 件)

- ① 神山靖彦、The symplectic volume of the moduli space of spatial polygons、第 5 回日中友好幾何学研究集会、2010 年 2 月 2 日、OIST (沖縄科学技術研究基盤整備機構)
- ② 神山靖彦、Configurations associated to centers of mass、COE 国際会議 “International Conference on Topology and its Applications”、2007 年 12 月 5 日、京都大学
- ③ 神山靖彦、Configuration spaces of mechanical linkages、International Conference on Algebraic Topology、2006 年 10 月 17 日、Henan University (中国)
- ④ 神山靖彦、The symplectic volume of spatial polygon spaces、COE 国際会議、“International Conference on Toric Topology”、2006 年 5 月 30 日、大阪市立大学

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 出願年月日：
 国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 取得年月日：
 国内外の別：

[その他]
 ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

神山 靖彦 (KAMIYAMA YASUHIKO)

琉球大学・理学部・教授

研究者番号：10244287

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし