様式Ｃ-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　22 年 6 月　2 日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００６　～　２００９
課題番号：１８５４００９３
研究課題名（和文）　非可換幾何学と亜群構造について

研究課題名（英文）　Noncommutative Geometry and groupoid

研究代表者
　宮崎　直哉（MIYAZAKI NAOYA）
　慶應義塾大学・経済学部・教授
　研究者番号：５０３１５８２６

研究成果の概要（和文）：“非可換空間”における幾何学、巡回理論、K 理論や変形を亜群を通して捉えること、亜群として捉えられた空間の上のディラック作用素の構成とその基本的性質の解明、さらには指数定理の拡張等などを研究した。それらとはまた別の方向で、プランク定数を形式的パラメータとして捉える変形ではなく、実変数（あるいはさらに複素変数）として捉え変形を考察する事(非形式的変形量子化とよぶ)、Star exponential などといった超越的な（変形された）関数も考察した。

研究成果の概要（英文）：We studied noncommutative geometry, cyclic theory, K-theory, Dirac operator on a groupoid. It is very important to resolve the fundamental problems and extension of index theory to noncommutative theory. On the other hand, we also studied nonformal deformation quantization and transcendental elements which appear nonformal deformation quantization, because they are regarded as representative of noncommutative phenomena.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
平成１８年度	９００，０００	０	９００，０００
平成１９年度	９００，０００	２７０，０００	１,１７０,０００
平成２０年度	８００，０００	２４０，０００	１,０４０,０００
平成２１年度	８００，０００	２４０，０００	１,０４０,０００
年度			
総　計	３，４００，０００	７５０，０００	４，１５０，０００

研究分野：幾何学
科研費の分科・細目：幾何学
キーワード：変形量子化、指数定理

１．研究開始当初の背景　非可換幾何学において変形量子化や指数定理は極めて大きな因子となっている。本研究における亜群構造という観点もそのような重要な指針のうち

の一つである。また理論物理学に現れる量子化と呼ばれる概念やフーリエ変換、漸近解析、フーリエ積分作用素などもこれらの理論と密接に関連する分野である。

２．研究の目的　亜群構造の観点から非可換幾何学や変形量子化みなおすことにより新たな知見を模索することを目的としていた。また対象が量子化されたものであるために無限次元空間（必ずしもヒルベルト空間の構造が入るとは限らない）の取り扱いも大切になってくる。
“非可換空間”における幾何学、とりわけ巡回理論、K 理論や変形を亜群を通して捉えること、亜群として捉えられた空間の上のディラック作用素の構成とその基本的性質の解明、さらには指数定理の拡張等などが活発に研究をつづけてきた。そしてこれらはまだまだ発展途上にある分野といわねばならない。
また、最近の梶浦・斉藤・高橋諸氏らの結果により A モデルと B モデル間の関係（ミラー対称性）において、カラビ・ヤウ多様体を含みさらに広い枠組みの中での“非可換空間”と“特異点”との関係が明らかになりつつある。つまり非可換性の情報が特異性へ集約されてくるというものである。

３．研究の方法　亜群構造により変形量子化の分類やスピン構造の解明を行う。また亜群上のディラック作用素の定義基本的な性質、亜群作用との両立性、漸近解析的性質などを調べていく。また非形式的変形量子化の理論においても漸近解析的手法によりその性質を究明する。

４．研究成果　変形量子化や亜群構造という観点から様々な結果を得た。詳細は発表論文などを参照のこと。以下にはその概要を記す。

まず、本研究期間中前半で主に取り組んできた事柄について概要を与える。形式的変形量子化の幾何学的実現としてのContact Weyl 多様体とその自己同型群の
モデルスペースおよび幾何学的な構造に関する研究：１９７０年代に形式的変形量子化の概念が提案されて以来、その存在、構成、分類などに関して活発な研究がなされてきたが、それに関連して特に底多様体がシンプレクティック多様体の場合に形式的変形量子化の構成法として知られていた「Fedosov 量子化」と「大森・前田・吉岡 量子化」をつなぐ掛け橋として、１９９８年ころ吉岡朗氏により Contact Weyl 多様体 と呼ばれる概念が導入された。これは本質的にスター積（形式的変形量子化）の幾何学的な実現と見なされる（別の幾何学的な実現の方法として、Deligne 相対類（大森・前田・吉岡諸氏らは Poincare-Cartan類と言う名前で呼んでいる）から定まる「滑らかな亜群構造」がある。様々な状況で現れる特性類に対応した対象の幾何学的実現として亜群構造の研究は今後の重要な方向性を与えている。）。本年度はこのように導入された構造（スター積、形式的変形量子化）に関する自己同型群 Aut(M,*) について、「無限次元リー群としての構造」、「その位相的な性質」、「このようにして得られる群と古典的な（無限次元リー群として

の）シンプレクティック変換群との関係」等をしらべた。その結果、「自己同型群 Aut(M,*)の無限次元リー群のモデルスペースとして考えられている空間がヒルベルト空間のようなある意味有限次元空間のアナロジー的なものではなくMackey完備な局所凸線形位相空間になっていること」、「シンプレクティック変換群の元を自己同型群として持ち上げることが可能なこと」などが明らかになった。特に後者の結果とそこで使われた議論は自己同型群 Aut(M,*) の位相的な性質や、この群からシンプレクティック変換群への全射準同型に関するセクションを調べる上で今後重要な道具になると思われる。

つぎに、本研究期間中の後半で主に取り組んできた内容について概要を与える。Dixmier-Douady類の幾何学的対応物であるgerbeでひねったTwisted vectorial bundleと以前筆者により導入されたspin亜群というものを直接組み合わせることにより、Dixmier-Douady類を反映させたtwisted spin connectionの候補を考察して、その基本的な亜群作用に関する変換法則について計算を行った。

亜群の非可換幾何学研究への重要性は``twisted K-theoryの作用素論的な定義とbundlegerbe moduleによる定義" に深く関係していることからも容易に想像がされることではあるが、実際に亜群という概念を意識しながらいろいろなものを眺めていると、実は亜群構造が様々な場面に（陰に）現れていることに気がつかされる.

この先に見える話題としてはスピン亜群に同伴するスピノールバンドルをTwisted vectorial bundleで捻ったところ（Dixmier-Douady類に対応する亜群に同伴するモデュロイドのセクションのなす空間）に作用するディラックを考えたり、その同変版を考えたり、局所化を考えたりということがあるかと思われるが、筆者自身では詳細については詰めきれていない.

今の設定では、閉多様体でない場合を考えなくてはならないという大きな障害があるからである．とりわけ

・その熱核に付随すべき適切な境界条件をどのように設定するか？

・指数、射影やそれに対応する特性類の受け皿・器などをどうするか?

などが難しい問題として残っている．無論、twisted K-theory, あるいはtwisted Cech-deRham 理論が非常に重要な役割を担っていることは想像に難くない.それらの関係を詳細に調べることは今後の重要な課題としたい.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

①<u>Naoya Miyazaki</u>,
Characteristic classes relating to quantizat,
in 京都大学数理解析研究所講究録 1576, 67 - 81, 2008.
(査読なし)

②<u>Naoya Miyazaki</u>,
Lifts of symplectic diffeomorphisms as automorphisms of a Weyl algebra bundle with Fedosov connection,
International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 4, 533-546, 2007.
（査読あり）

③<u>Naoya Miyazaki</u>,
Examples of Groupoid,
in Proceedings of the international Sendai-Beijing joint workshop, 97-108, 2007.
（査読あり）

④Naoya Miyazaki,
A Lie group structure for automorphisms of a contact Weyl manifold in From Geometry to Quantum Mechanics, 25-44, Progress in Mathemastics 252 Birkhauser 2007
（査読あり）

⑤Naoya Miyazaki,
On the integrability of deformation quantized Toda lattice,
Acta Appl. Mathematecae, 92, 21-36, 2006.
（査読あり）

〔学会発表〕（計１件）
発表者：宮崎直哉
Remarks on deformation quantization,
京都大学数理解析研究所共同研究会
「幾何学的力学系」２００９年１２月２１日
京都大学において

〔その他〕

２００６年、２００８年に慶應義塾大学日吉キャンパスにおいて、
・非可換幾何学と数理物理学２００６
・非可換幾何学と数理物理学２００８
を開催し若手並びに中堅の研究者の交流、情報交換を行った。

６．研究組織
(1)研究代表者
宮崎　直哉（MIYAZAKI NAOYA）
慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号：５０３１５８２６

(2)研究分担者　なし

(3)連携研究者　なし