

平成22年5月31日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006 ～ 2009

課題番号：18540096

研究課題名 (和文) 定曲率空間の曲面とその特異点に関する微分幾何的研究

研究課題名 (英文) Differential geometric researches on surfaces in a space of constant curvature and their singularities

研究代表者

國分 雅敏 (KOKUBU MASATOSHI)

東京電機大学・工学部・教授

研究者番号：50287439

研究成果の概要 (和文)：主な研究対象は、双曲型空間と呼ばれる曲率が負に曲がった3次元空間内の微分幾何学的に良い性質をもつ曲面であった。(双曲型空間では、一つの‘直線’に対してそれに平行な‘直線’がたくさん存在するなど、我々の‘常識’を超えた興味深い現象が数々起こる。双曲型空間は大変興味深い研究対象である。) 平坦波面と呼ばれる特異点を許容した曲面について、それらのエンドの漸近挙動を解明した。また、線型ワインガルテン曲面について、大域的表現公式、特異点の形状の判定条件、および向き付け可能性 (すなわち大域的表裏の区別がつくかどうか) などの研究成果を得た。

研究成果の概要 (英文)：We studied surfaces in a three-dimensional manifold of constant negative curvature, called the hyperbolic space, requiring them to have good properties from the differential-geometric viewpoint. (Note that the hyperbolic space has interesting features beyond our common sense, e.g., a single hyperbolic line has infinitely many parallels.) We clarified the asymptotic behavior of ends of flat surfaces admitting singularities. Concerning linear Weingarten surfaces, we had a global representation formula, criterion for the shape of singularities, the orientability and co-orientability, and so on.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	3,100,000	600,000	3,700,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何、平均曲率、ガウス曲率、特異点

1. 研究開始当初の背景

微分幾何的に良い性質をもつ曲面の大域的

研究においては、実はその大域的な例すらまれであることがしばしばある。(例えば、「3

次元ユークリッド空間において、完備な平坦曲面は柱面に限る、完備な負の定曲率曲面は存在しない」等。)しかし、曲面に特異点を許容することにより、豊富に例が存在し、ひとつつ広がった世界が現れることもまた事実である。3次元双曲型空間において平坦波面と呼ばれる特異点を許容した曲面について、研究代表者國分は梅原雅顕氏(大阪大学大学院理学研究科教授)、山田光太郎氏(東京工業大学大学院理工学研究科教授)と2003年頃から共同研究を行っていた。(波面(wave front)とは、大雑把に言えば、波面自身は特異点を許容するが、その特異点上でも単位法ベクトルが生き残っており、単位法ベクトル場が単位法バンドルの切り口として、そのバンドル内の特異点をもたない曲面となるようなもの、を意味する。)波面は特異点論の専門家により特異点論の立場から研究されていたが、微分幾何的なアプローチによる研究は見当たらなかった。その一方で、特異点を持たないというカテゴリーでは、J. A. Galvez, A. Martinez, F. Milan 達や P. Roitman による双曲型空間の平坦曲面の研究が知られていたが、彼らの興味はプラトー問題等、解析的な方面にあったようで、研究代表者らの目標とする特異点をもった曲面の大域的研究とは方向性が違うように見受けられた。そのような意味で、この研究課題については既存の研究とは趣を異なるものとし、新たな研究分野の提唱といった意識も持ちつつ取り組みたいと思っていた。

2. 研究の目的

1. に記載した背景のもとに、曲面に特異点を許容した場合、定曲率空間の曲面の微分幾何に関する既知の結果がどのように一般化されるか、もしくは全く別の様相を呈すか、ということに興味を抱いた。この興味が本研究遂行の動機となった。

古い文献を調べると、現代よりむしろその当時の方が特異点をもつ曲面が頻繁に扱われていたように思える面もある。例えば、Enneper, Kuen, Dobriner, Sievert らの1800年代の仕事に、特異点つきのガウス曲率一定曲面を見ることができる。特異点つき曲面の微分幾何的研究には空白の時代があるように思える。然るに、特異点つき曲面の古典的結果を現代的立場から再検証することによる新しい発見も目的とした。

より具体的な目的をテーマ毎に述べる。

(1) 3次元双曲型空間内のワインガルテン曲面の微分幾何的基礎研究

① 3次元双曲型空間内の線形ワインガルテン曲面の微分幾何的不変量による特徴づ

け・分類:

このワインガルテン曲面全体のなすクラスを考えたとき、平均曲率が一定値1の曲面や平坦曲面はこのクラスに属する。(平均曲率が一定値1の曲面や平坦曲面は、3次元双曲型空間の曲面論で従来から非常によく研究されている対象である。)簡単に確かめられる興味深い性質として、この線形ワインガルテン曲面の平行曲面は再び同種の線形ワインガルテン曲面となることが挙げられる。このとき一般に、その平行曲面には特異点が生じ、波面(wave front)となる。したがって、この場合も波面のカテゴリーで、すなわち、線形ワインガルテン波面を考えるのが自然である。研究代表者らは大域的な研究に興味の中心を持っていたので、完備性などの仮定のもと、低い次数のガウス写像をもつワインガルテン波面の分類などを目的とした。(それ以前に、特異点つきの曲面に完備性などの概念を導入することなども課題であった。)

② 線形ワインガルテン波面にあらわれるエンドの形状の解明:

1点穴明きのエンドと円環状のエンドの2種類が現れることが分かっていたが、1点穴明きのエンドでも、更に、正則エンド・非正則エンドに分類され、円環状エンドでも、特異点が集積するものもあるなど、平均曲率が一定値1の曲面や平坦波面のときよりも複雑にふるまうことが、実例で分かっていた。そこで、より理論的にエンドの振る舞いを解明することを目的とした。

③ 線形ワインガルテン波面にあらわれる特異点の位相的形状の解明:

いくつかの実例から、大抵の場合、‘カスプ状曲面’や‘ツバメの尾’と呼ばれる特異点が現れることが予想された。既知の判定方法の応用で解決されることが期待された。

(2) 3次元双曲型空間内のワインガルテン曲面の発展的研究

① 線形ワインガルテン波面の平行曲面をとったときの、エンドや特異点の振る舞いの解明

② 線形ワインガルテン波面の向き付け可能性に関する研究

③ 他の定曲率空間の特異点つき曲面への一般化や応用

3. 研究の方法

日常的な研究活動は、研究代表者・研究分担者の各々が研究テーマに関連する論文・文

献等を調査し、それらを正確に理解すること、問題点の抽出、問題解決、新たな問題テーマを発見することであった。(必要な図書等は予算「設備備品費」により購入した。)その上で、研究代表者は研究分担者とのディスカッションやセミナーの機会を設け、各々が得た研究成果をお互いに発表し検証・討議した。各研究分担者のセミナーにおける役割は次であった：

- (1) 研究代表者國分は、セミナーの企画・運営の責任者となり、日程の調整、会場の確保等を行った。そして、國分は、最新の特異点つきの曲面に関する文献等を精査・精読しセミナーに望み、他のメンバーに報告した。また、Mathematica等の数式処理ソフトウェアを活用し、曲面の3Dグラフィックスを作成し、研究の理解が深まるよう努めた。(必要なパーソナルコンピューターは予算「設備備品費」から、数式処理ソフトウェア Mathematica は予算「消耗品費」から購入した。)
- (2) 入江氏は、氏の専門分野であるシンプレクティック構造や接触構造に関する文献等を精査・精読しセミナーで報告した。
- (3) 小林氏は、氏の専門分野である曲面論におけるDPW法に関連する文献等を精査・精読しセミナー報告した。
- (4) ラスマン氏は論理的な誤りはないか、他の分担者の気づくことのできなかつた事項はないか等を検討した。

上記セミナーのほかにも代表者は梅原雅頭氏や山田光太郎氏のもとに赴き、研究成果の検証、研究の方向性の助言及び専門知識の提供をいただいた。また、学術的価値の評価等、オブザーバー的な役割も担っていただいた。その際に、「旅費」を使用した。研究成果は、各種研究集会で講演し、国内外の研究者に成果を積極的にアピールした。その際には、研究集会参加者との意見交換、および助言をいただくことなどを通じ、研究内容の充実をはかることができた。これらの際にも、「旅費」を使用した。

4. 研究成果

ユークリッド空間の平均曲率一定曲面、3次元双曲型空間の線形ワインガルテン曲面(平均曲率一定曲面、ガウス曲率一定曲面を一般化したもの)を主に研究し、次の成果を得た。

(1) BLW曲面について：

3次元双曲型空間の、平均曲率関数から1を引いたものとガウス曲率関数が比例するようなワインガルテン曲面(通称BLW曲面)は局所的には正則な微分形式と有理型関数で書き表

すことができることは既に知られていた。

(BLW曲面は平均曲率一定値1の曲面や平坦曲面の一般化である。)この表現公式を波面のカテゴリでかつ大域的なものに改良することができた。更に、その表現公式によりBLW波面の研究を進めることができた。具体的には、弱完備性なる大域的性質を定義し、いくつかの興味深い大域的具体例の構成などを行った。また、弱完備性の同値条件をひとつ求めることができた。これらについて論文にまとめた。

(2) 平坦波面のエンドの形状について：

3次元双曲型空間の平坦波面のエンド(端)の形状に関する漸近挙動についての最終的結論を得ることができた。要約すると、エンドへの特異点集合の集積の如何にかかわらず、エンドの漸近挙動はその増大度のオーダー(ピッチと呼ばれるもの)が支配的であることを証明することができた。これについては研究分担者ラスマン氏らと共著で論文を執筆した。

(3) BLW波面の向き付け可能性、余向き付け可能性について：

特異点つきBLW波面がカスプ状曲面もしくはツバメの尾と呼ばれる曲面に局所微分同相となるか否かの判定条件を与えた。また、BLW波面の向き付け可能性・余向き付け可能性について、最終的な結論を得ることができた。なお、この研究成果はプレプリントにまとめ、2009年度中にある学術雑誌に投稿したが、本報告書執筆中の現在、査読結果を待っているところである。

(4) ユークリッド空間の平均曲率一定曲面について：

研究分担者小林真平氏はユークリッド空間の平均曲率一定曲面のエンドの漸近挙動について論文を執筆した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

- ① Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada, Asymptotic behavior of flat surfaces in hyperbolic 3-space, Journal of the Mathematical Society of Japan, 61, 2009, pp. 799-852, 査読有
- ② Masatoshi Kokubu, Surfaces and fronts with harmonic-mean curvature one in hyperbolic 3-space, Tokyo Journal of Mathematics, 32, 2009, pp. 177-200, 査

- 読有
- ③ 國分 雅敏、3次元双曲型空間における平坦曲面のエンズの漸近挙動、京都大学数理解析研究所講究録、1623、2009、pp. 62-75、査読無
 - ④ 國分 雅敏、3次元双曲型空間の線形Weingarten 曲面について、京都大学数理解析研究所講究録、1527、pp. 49-66、2007、査読無、<http://hdl.handle.net/2433/58890>
 - ⑤ Shimpei Kobayashi, Asymptotics of ends of constant mean curvature surfaces with bubbletons, Proceedings of the American Mathematical Society, 136, pp.1433-1443, 2008, 査読有
 - ⑥ Masatoshi Kokubu, On flat fronts in hyperbolic 3-space, Oberwolfach Report, 24, pp.1337-1340, 2007, 査読無

[学会発表] (計17件)

- ① 國分 雅敏、3次元双曲型空間のホロ球面的線型ワインガルテン曲面について、数理解析研究所 研究集会「写像の特異点とそれに関連する幾何学」、2009年12月9日、日本大学オーバルホール
- ② Masatoshi Kokubu, Asymptotic behavior of flat surfaces in H^3 , 国際研究集会 `Integrable systems, Geometry and Visualization' 2008年12月12日、九州大学箱崎地区・福岡大学
- ③ Masatoshi Kokubu, On differential geometric aspect of flat fronts in hyperbolic 3-space, 9th International Workshop on Complex Structures, Integrability and Vector Fields, 2008年8月26日, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia (ブルガリア)
- ④ 國分 雅敏、3次元双曲型空間における平坦曲面のエンズの漸近挙動, RIMS 研究集会 `部分多様体の微分幾何学およびその周辺領域の研究'、2008年6月24日、京都大学数理解析研究所
- ⑤ Masatoshi Kokubu, On flat fronts in hyperbolic 3-space, Workshop `Progress in Surface Theory', 2007年5月2日, Oberwolfach 数学研究所 (ドイツ)

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

國分 雅敏 (KOKUBU MASATOSHI)
東京電機大学・工学部・教授
研究者番号：50287439

(2) 研究分担者

入江 博 (IRIE HIROSHI)
東京電機大学・未来科学部・講師
研究者番号：30385489
(H20年度から連携研究者)

小林 真平 (KOBAYASHI SHIMPEI)
弘前大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：40408654
(H20年度から連携研究者)

ラスマン ウェイン (ROSSMAN WAYNE)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50284485
(H20年度から連携研究者)

(3) 連携研究者

()

研究者番号：