

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2009

課題番号：18540097

研究課題名 (和文) 3次元多様体の位相幾何的および双曲幾何的研究

研究課題名 (英文) Topological and hyperbolic geometric research in 3-manifolds

研究代表者

相馬 輝彦

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：50154688

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：3次元多様体, 双曲幾何学, クライン群, 曲線複体

#### 1. 研究計画の概要

3次元多様体を位相幾何的手法と双曲幾何的手法の両方を組み合わせて研究する。ペレルマンによって3次元閉多様体に関する「幾何化予想」が肯定的に解決したので、今度は3次元双曲開多様体を中心に研究する。特に、最近解決された、エンディング・ラミネーション予想の主要部分である双リプシッツ定理の証明の簡易化・一般化をすることによって、3次元双曲開多様体の性質を調べる。例えば、双曲開多様体の列の幾何的極限の位相的および幾何的分類を完成させる。

#### 2. 研究の進捗状況

コンパクト曲面  $S$  にホモトピー同値な双曲3次元多様体に関する双リプシッツ定理の証明の簡易化には成功した。今はその定理を一般化 (双曲3次元多様体が無限生成基本群を含む場合も含む) を証明している途中である。これが完成すれば、双曲多様体の列の幾何的極限の分類を大幅に前進させることが出来る。

具体的には、双曲3次元開多様体の列  $\{N_n\}$  を考え、それぞれの要素に双リプシッツ・モデル  $M_n$  を対応させる。双リプシッツ・モデルの幾何的な構造の単純さにより、 $M_n$  の幾何的極限  $M_\infty$  は、ブリック多様体となる。一方、 $N_n$  の幾何的極限  $N_\infty$  は  $M_\infty$  に双リプシッツ同値であるから、 $N_\infty$  の位相的構造が明らかになった。例えば、 $N_\infty$  は  $S \times \mathbb{R}$  の開部分集合として実現でき、多くとも可算個のエンドをもつ。それらのうちで幾何的有限エンドは高々有限個であるが、単純退化エンドとワイルド・エンドは無限可算個存在する場合

もあることが証明できた。前者2種類のエンドに対しては、それぞれ共役構造とエンディング・ラミネーションをエンド不変量とし、ワイルド・エンドはエンド不変量が定義されていないとする。さらに、双曲多様体が幾何的極限であるための位相的必要条件 (エンド不変量に情報も含む) は、十分条件であることも証明できた。すなわち、幾何的極限の位相的分類が完成したことになる。また、2つの幾何的多様体と同じ位相型を持ち、それらの間の同相写像  $h$  がエンド不変量を保存するとき、 $h$  は等長写像に固有ホモトピックであることが証明できた。これで、幾何的極限の幾何的分類も完成した。

現在は、上の議論を精密化することによって、 $S$  型とは限らない一般の有限生成基本群を持つ双曲3次元多様体の列の幾何的極限として現れる双曲3次元多様体の分類を進めているところである。

#### 3. 現在までの達成度

おおむね順調に進展している。

理由： $S$  型の双曲3次元多様体の幾何的極限の位相的・幾何的分類が完成したこと、および双リプシッツ・モデル定理の証明の簡約化できたことにより、今後の研究に対する見通しが良くなったことによる。

#### 4. 今後の研究の推進方策

上で述べたように、新年度の研究推進のための手法は既に確立しているので、後は実行するだけである。しかし、最終年度になるので、なるべく集中的にこの研究課題に取り組

み, その成果を学会等で発表し, 論文として  
まとめ専門誌に投稿する予定である.

[その他]  
ホームページ  
<http://www.comp.metro-u.ac.jp/~tsoma/>

5. 代表的な研究成果  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に  
は下線)

[雑誌論文] (計 2件)

- ① 相馬輝彦, 位相的クライン群論の最近の  
話題, 数学・論説 [査読有] 掲載決定.
- ② S. Kiriki and T. Soma, Persistent  
antimonotonic bifurcations and strange  
attractors for cubic homoclinic  
tangencies, [査読有] Nonlinearity 21  
(2008) 1105-1140.
- ③ T. Soma, Existence of ruled wrappings  
in hyperbolic 3-manifolds, Geom. Topol.  
[査読有] 10, (2006) 1173-1184.

[学会発表] (計 4件)

- ① 相馬輝彦, 幾何的極限とエンディング・  
ラミネーション予想, 日本数学会年会・ト  
ポロジー分科会・特別講演, 3月26日,  
2009年, 東京大学.
- ② T. Soma, Geometry and topology of  
geometric limits, Topics in Teichmüller  
Theory and Kleinian Groups, 11月13日,  
2007年, MSRI, Berkeley, USA.
- ③ T. Soma, Ahlfors' measure problem for  
geometric limit Kleinian groups, Lars  
Ahlfors Centennial Celebration, 8月24  
日, 2007年, Univ. of Helsinki, FINLAND.
- ④ T. Soma, Geometric limits of  
quasi-Fuchsian groups, Hyperbolic  
Structures on 3-Manifolds and Large  
Scale Geometry of Teichmüller Space, 7  
月16日, 2007年, Univ. of Warwick,  
ENGLAND.

[図書] (計 0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0件)

○取得状況 (計 0件)