

平成 21 年 5 月 22 日現在

研究種目： 基盤研究（C）
 研究期間：2006～2008
 課題番号： 18540101
 研究課題名（和文） 空間グラフの位相幾何学的研究
 研究課題名（英文） Study of spatial graphs from the topological viewpoint

研究代表者

谷山 公規（TANIYAMA, Koki）
 早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
 研究者番号：10247207

研究成果の概要：

非自明な結び目を一つ固定したとき、その射影図の結び目解消数はいくらかでも大きく出来ることを示した。また、円周からある集合への写像で、その多重点が高々有限個の2重点のみであるものについて、円周をある2つの単純弧に分解してそれぞれの単純弧への制限写像が単射になるようにすることが出来るかどうかを、その写像から定まるコード図式の言葉で決定した。またほとんどの交点が正交点であるような射影図を持つ絡み目の符号数などについて研究した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	2,400,000	0	2,400,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
総計	4,600,000	660,000	5,260,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：結び目、空間グラフ

1. 研究開始当初の背景

空間グラフに関しては粗い分類であるデルタ分類は完成しているが、それより細かい分類は一般にはなされていない。また空間グラフの内蔵する結び目・絡み目に関する問題や空間グラフの射影図に関する問題など、研究が発展途上にある問題が数多く存在している。

2. 研究の目的

有限グラフを一つ固定したとき、その3次元ユークリッド空間への埋め込み全体に対して研究代表者は、(1) 全同位 (2) 同境

(3) 同位 (4) 1-同値 (5) 辺ホモトピー (6) 頂点ホモトピー (7) ホモロジー という7種の同値関係を定義した (Topology)。これらには自然な強弱関係があり、研究代表者は(7) ホモロジーによる分類を完成させている (Topology Appl.)。本研究の目的の一つは(6) 頂点ホモトピーによる分類である。研究代表者は本橋氏 (関東学院大学) との共同研究 (Proc. Knots 96) において概隣接グラフについては(6) 頂点ホモトピーによる分類を完成させている。また概隣接グラフの特徴付けも行なった。絡み目に対しては(6) 辺ホモトピー、(7) 頂点ホモトピーともに J. Mi Inor (Ann. Math.)

が定義した絡み目ホモトピーと一致する。絡み目の絡み目ホモトピーによる分類は 1990 年に Habegger-Lin (J. AMS) によってなされた画期的な研究である。したがって本研究の目的は大きなものであるが、これに対するアプローチとしては先ずグラフに条件をつけて研究する方法がある。具体的にはグラフに (グラフ理論の意味で) 3 連結、さらには平面的という条件をつけて問題を考える。このときこのグラフについてそれが頂点ホモトピーの範囲で自明であるかどうかの決定をしたい。これは 3 連結な平面的グラフの平面への埋め込みが空間の中の全同位で一意的であることにより、Milnor の手法の relative 版が使えるであろうことによる。次に考えられるアプローチは種々のタイプの局所変形との関係の考察による方法である。つまり本橋氏が明らかにしたように空間グラフについては (7) ホモロジーによる分類と中西氏・村上氏と Matveev 氏が独立に定義したデルタ変形による分類は一致する。葉広氏 (京都大学) は結び目、絡み目に対して $\$C_k\$$ 変形と呼ばれる一連の局所変形を定義して研究している。 $\$C_1\$$ 変形は交差交換のことであり、 $\$C_2\$$ 変形はデルタ変形と一致する。 $\$C_3\$$ 変形は clasp-pass 変形とも呼ばれる。研究代表者は安原氏 (東京学芸大学) との共同研究 (Topology Appl.) においてある種の空間グラフの clasp-pass 分類を与えた。その後新國氏 (金沢大学) によって別の空間グラフについても clasp-pass 分類が与えられているが一般のグラフではまだ未解決である。一般のグラフについて clasp-pass 分類を与えることも本研究の目的である。葉広氏は結び目に対しては $\$C_k\$$ 変形による分類と次数が $\$k-1\$$ 以下の Vassiliev 不変量による分類が完全に一致することを証明した。(Geometry Topology) この結果は絡み目では成立しない。一般の空間グラフの clasp-pass 分類という問題の先には一般の空間グラフの $\$C_k\$$ 変形による分類という大きな問題が控えている。実は辺の数が $\$k\$$ のグラフの $\$C_k\$$ 変形による分類は (5) 辺ホモトピーによる分類よりも細かいことが分かっているので、この大きな問題は上述の (6) 頂点ホモトピーによる分類問題も含んでいるということが出来る。

また本研究のもう一つの大きな目的として空間グラフの identifiable projection の決定問題がある。空間グラフの identifiable projection は Youngsik Huh 氏 (Hanyang University, KOREA) との共同研究 (J. Knot Theory Ramifications) において提唱された概念であるが、起源を研究代表者の knot projection に関する研究 (Tokyo J. Math.) に持っている。identifiable projection と

はグラフから平面への generic map で、空間へのリフトが全同位の範囲で一意的であるものを呼ぶ。Huh 氏との共同研究で、非平面的グラフは identifiable projection を持たないことが分かっている。同じく Huh 氏との共同研究で 4-連結な平面グラフを含む平面グラフのある集合についてはそれらの identifiable projections の完全な特徴付けがなされている。研究代表者は、一般の平面グラフについてはその任意の identifiable projection は平面埋め込みからある種の変形で得られるであろうと予想している。この予想に (出来れば肯定的な) 解決を与えるのも本研究の目的である。そのためには連結度の低いグラフの空間埋め込みの非自明性を簡単に判定するための手法が必要になる。その一つとして研究代表者は曲面を使って空間グラフの非自明性を判定する方法を開発した。(J. Knot Theory Ramifications) この手法はさらに Fengchun Lei 氏 (Harbin Institute of Technology), Gengyu Zhang 氏 (Harbin Institute of Technology, 東京工業大学) との共同研究において発展した。さらにこの手法を強化することも期待される。

さらに、これらの研究に関連して空間グラフの中の結び目・絡み目に関する Conway-Gordon の結果 (J. Graph Theory) や樹下氏の結果 (Topology and Computer Science) を一般化した問題が大きく進展するものと思われる。また、今のところ独立しているが、グラフの全曲率に関する研究代表者たちの結果 (Diff. Geom. Appl.) との関連も明らかにされることが期待される。さらに空間グラフの不変量の研究をとおして結び目・絡み目の不変量、特に Vassiliev 型不変量の積空間による解釈を与えることも本研究の目的である。また 3 次元多様体の体積予想に見られるように、Vassiliev 不変量と補空間のトポロジーとの深い関係の存在も予期されるので、広く 3・4 次元トポロジーの視点に立った空間グラフ研究を進展させることも本研究の目的である。

3. 研究の方法

空間グラフの頂点ホモトピーによる分類のためには既に定義されている頂点ホモトピー不変量だけでは不十分である。そこであたりに Milnor 型の頂点ホモトピー不変量を定義して研究することを目標とする。そのためには Milnor 不変量に関する現在までの研究の文献調査が必要である。Milnor 不変量自体は古くから知られているが、その Vassiliev 不変量としての側面は最近いろいろと解明されてきている。したがって国内外の諸研究者と広く交流を行ない最新の情報を交換し

たい。特に Cochran に始まる Milnor 不変量の幾何的な解釈が重要と思われる。以前研究代表者は大山氏（東京女子大学）との共同研究で結び目の Vassiliev 型不変量を使って空間グラフの新しい頂点ホモトピー不変量を定義したが、これについてさらに詳しく検討することが有効であろう。そのためにはパソコンによって高い次数の Vassiliev 不変量の数値計算をしてみることが手助けとなる。これらの空間グラフの不変量の研究をとおして結び目・絡み目の Vassiliev 不変量の新しい幾何的な解釈が得られることも期待出来る。さらに S^1 変形による分類に関してもバンド和を用いた空間グラフの表示法を発展させてのアプローチを試みる。

一般のグラフについての頂点ホモトピー分類のためのステップとして、3 連結グラフについての分類を考える。一般のグラフはある意味で一意的に 3 連結グラフに分解できるので、これが出来ればほぼ完成といえると思われる。そのためには 3 連結グラフについての、特にその積空間についてのグラフ理論的考察を行なう。さらには空間グラフの各種局所変形による分類を考える。

一方結び目・絡み目の Vassiliev 不変量とそれらの補空間が含む圧縮不可能曲面の関係も考察する。また近年の体積予想も 3 次元多様体のトポロジーと量子不変量、Vassiliev 不変量のあいだの深い関係を示唆している。空間グラフにおいてもその補空間の持つ 3 次元トポロジー的な性質と Vassiliev 不変量との間に何らかの関係があると思われる。それを見出すためにも 3 次元トポロジー的観点からの空間グラフ研究も推進したい。

また、identifiable projection の研究に関しては、連結度の低いグラフのうちで鍵になるのは bouquet graph であろうと思われるので、まず bouquet graph の identifiable projections の決定をしたい。そのためには空間グラフの非自明性判定法をもう少し強化する必要があると思われる。bouquet graph で出来れば cut vertex を持つグラフの identifiable projections は cut vertex を持たない graph のその研究に帰着出来ると思う。次に 2-連結であるが 3-連結でないグラフについて考察し、最終的に 3-連結グラフの identifiable projection の決定問題に帰着出来ればと思っている。

4. 研究成果

(1) 結び目射影図の結び目解消数は、その射影図の交点を入れ替えて自明結び目の射影図にするために必要な交点の入れ替えの最

小回数で定義される。このとき結び目の結び目解消数は、その結び目の射影図の結び目解消数の、射影図全てにわたっての最小値として定義される。非自明結び目を一つ固定したときに、その結び目の射影図の結び目解消数全体のなす集合を考える。今回この集合がツネに上に有界でないことを示した。実際には次を示した。非自明結び目の射影図が一つ与えられたとき、同じ結び目の射影図で、その結び目解消数があたえられた射影図よりちょうど 2 大きいものが存在する。また非自明な結び目の結び目解消数の 2 倍はその結び目の最小交点数マイナス 1 以下であることはよく知られているが、ここで等号が成り立つ結び目は $(2, n)$ -トラス結び目に限ることを示した。非自明な絡み目の結び目解消数の 2 倍はその絡み目の最小交点数以下であることはよく知られているが、ここで等号が成り立つ絡み目の完全な特徴付けを行なった。

(2) 円周からある集合への写像で、その多重点が高々有限個の 2 重点のみであるものについて、円周をある 2 つの単純弧に分解してそれぞれの単純弧への制限写像が単射になるようにすることが出来るかどうかを、その写像から定まるコード図式の言葉で完全に決定した。

(3) Jozef Przytycki 氏 (George Washington University) との共同研究において、nontrivial positive link、nontrivial almost positive link は negative signature を持つことを示した。また trivial link の positive diagram、almost positive diagram、2-almost positive link diagram の決定をした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

K. Taniyama, Unknotting numbers of diagrams of a given nontrivial knot are unbounded, to appear in *J. Knot Theory and Ramifications*. 査読有 [掲載確定]

T. Motohashi and K. Taniyama, An irreducible rectangle tiling contains a spiral, *Journal of Geometry*, 査読有, 90 (2008), 175-184.

[学会発表](計2件)

K. Taniyama, **Circle immersions that can be divided into two arc embeddings**, **KNOTS IN WASHINGTON XXVIII**, February 28, 2009, **George Washington University**, Washington DC, USA.

K. Taniyama, **Unknotting numbers of diagrams of a given nontrivial knot are unbounded**, **KNOTS IN WASHINGTON XXVI**, April 20, 2008, **George Washington University**, Washington DC, USA.

6 . 研究組織

(1)研究代表者

谷山公規 (TANIYAMA, Kouki)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
研究者番号：10247207