様式 C-7-2

自己評価報告書

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006～2009
課題番号：１８５４０１０５
研究課題名（和文）　微分方程式、幾何構造、そしてツイスター理論の相互関係

研究課題名（英文）　Correlation between differential equations, geometric structures, and twistor theory

研究代表者
待田　芳徳　(MACHIDA YOSHINORI)
沼津工業高等専門学校・教養科・准教授
研究者番号：９０１４１８９５

研究分野：微分幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：ツイスター理論、微分方程式、幾何構造、旗多様体

１．研究計画の概要

微分方程式とその解を、幾何構造、Lie 群の立場から研究することは、Lie から始まり、Cartan などが発展させて、今日に至っている。これをさらにダイナミックにダブル・ファイバリングを通して調べるツイスター理論と結びつけて、深い立場から調べることを目的とする。ツイスター理論は、Penrose により提案された理論であるが、その本質は２つの異なる幾何構造をダブル・ファイバリングによりその双対性を与えることである。この理論を微分方程式に適用することで、ある空間で定義された微分方程式に対して、その双対となる空間を通して解の構成やその性質を調べることができる。これにより、従来の微分方程式のクラスを拡張し、多変数への一般化も行うことが可能となる。

２．研究の進捗状況

(1) パス幾何学では、通常のものを拡張して、接触構造での接触分布に接するように拘束された Legendre 曲線のパス幾何の同値性を正規 Cartan 接続の曲率により特徴づけた。
(2) Clairaut 方程式の本質は、ツイスター空間で定義された曲線のツイスター対応による直線族の共通の性質として得られることを示し、その双対曲線が包絡線であることを明らかにした。その立場から、Legendre 直線族、ヌル直線族、Monge 直線族にも適用し、A 型,C 型,D 型へ Clairaut 方程式を拡張した。
(3) 複素空間上のツイスター空間を定義し、Laplace 方程式の解をツイスター積分表示で表わした。特に、基本解をグラフ（樹木）に付随した閉微分形式の積分表示で表わした。奇数次元の場合には Hadamard の降下法で示した。次に、接触空間上のサブ・リーマン計量に付随したツイスター空間を定義して、サブ・ラプラス方程式に対しても同様の議論を行い、解のツイスター積分表示を得た。
(4) 超幾何方程式では、通常のものを拡張して、B,D 型と C 型の非ホロノーム幾何構造に付随した超幾何方程式を定義し、ツイスター図式により解を構成した。
(5) 2 階編微分方程式で階数 1 かつ可積分な Monge 系をもつものとして定義される Goursat 方程式のすべてを、Lagrange-Grassmann 双対性により構成した。A 型,B,D 型,例外型に分けて例を与えた。さらに、一般化された Legendre 双対性を通して解の構成をした。
(6) Monge-Ampere 方程式を intrinsic に拡張した Monge-Ampere 系に対して、Hesse 型一定を拡張した 3 つの型として、分解可能な系、Lagrange 対をもつ系、CR 型をもつ系を定式化した。2,3 変数の場合に、ダブル・Legendre・ファイバリングを通して、Hesse 型一定と Gauss 曲率一定の方程式に対する幾何的解の特異点の起こりうる型を分類した。

３．現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。
常微分方程式については、パス幾何学と Clairau 方程式、偏微分方程式については、線形の場合、Laplace 方程式と超幾何方程式、非線形の場合、Goursat 方程式と Monge-Ampere 方程式というふうに、満遍なく微分方程式を扱ってきた。各微分方程式をさらに深く研究したいと思っている。

４．今後の研究の推進方策
(1) Goursat 方程式において、Lagrange-Grassmann 双対からできる双対空間は連立微分方程式系を定義しているが、包合的であることをいい、Goursat 方程式自身との関係を調べたい。
(2) Lagrange 対をもつ Monge-Ampere 系の同値問題を接続の曲率から解き、さらに CR 型にも手を伸ばしたい。
(3) Gauss 型積分を 3 次以上に拡張した場合に終結式の絡んだ不変式がでてくるが、どういう微分方程式と対応するのか、さらに不確定特異点をもつ超幾何方程式に C,D 型も含めてどう適用されるのか考えたい。
(4) Lie 代数の表現に付随した微分方程式系と解の部分多様体の対応、剛性問題、Backlund 変換や、SL(3)型随伴表現に付随した微分方程式と幾何の関係をくわしく調べたい。

５． 代表的な研究成果
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）
① 待田芳徳、高橋雅朋、Classifications of implicit second order ordinary differential equations of Clairaut type, Proc.Royal Soc.Edinburgh, 138, 821—842, 2008, 有
② 待田芳徳、Integral representations of solutions to the sub-Laplace equations by twistor theory, JP J.Geometry Topology, 7, 1—22, 2007, 有
③ 待田芳徳、石川剛郎、Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant Gaussian curvature, International J.Math., 17, 269—293, 2006, 有
④ 待田芳徳、石川剛郎、Extra singularities of geometric solutions to Monge-Ampere equations, 数理研講究録, 1502, 41-53, 2006, 無
⑤ 待田芳徳、Goursat equations and twistor theory, 数理研講究録, 1502, 125-139, 2006, 無

〔学会発表〕（計 2 件）
① 待田芳徳、Integrable fields on manifolds with SU(3)-structure, 「可積分系に関わる幾何学」国際研究集会, 2007.9.29, 奈良
② 待田芳徳、Differential equations associated with cone structures, 10th International Conference on Differential Geometry and its Applications, 2007.8.29, チェコ