様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年　 3　 月３１日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006～2009
課題番号：１８５４０１０５
研究課題名（和文）　微分方程式，幾何構造，そしてツイスター理論の相互関係

研究課題名（英文）　Correlation between differential equations, geometric structures, and twistor theory

研究代表者
待田　芳徳　（MACHIDA YOSHINORI）
沼津工業高等専門学校・教養科・准教授
研究者番号：９０１４１８９５

研究成果の概要（和文）：ツイスター理論とは，ダブル・ファイバー束を通して，異なる幾何構造の双対性をみることである．一方の空間の幾何構造に付随した微分方程式の方程式自身や解の構成，性質等を，他方の空間の幾何構造からツイスター図式を通して調べていく．この考えに沿って，コーン構造に付随したもの，クレロー方程式，モンジュ・アンペール方程式，リー代数の表現に付随したものなどをあつかった．

研究成果の概要（英文）：An aspect of the twistor theory is to research relations and correspondences between different geometric structures defined by a double fibration. For various classes of differential equations associated with geometric structures, we study geometric meanings of equations, properties of solutions, constructions of equations and solutions. We discuss equations associated with cone structures, Clairaut equations, Monge-Ampere equations, equations associated with Lie algebra representations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	900,000	0	900,000
２００７年度	800,000	240,000	1,040,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
２００９年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,300,000	720,000	4,020,000

研究分野：微分幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：ツイスター理論，微分方程式，幾何構造，旗多様体

１．研究開始当初の背景

Penrose によって始められたツイスター理論の骨子は、4 次元(複素)時空での共形不変な場の方程式を、ツイスター空間と呼ばれる

3 次元複素多様体での幾何的対象物に置き換えて議論することにある。そのツイスター理論は、土台を時空とツイスター空間の間のダブル・ファイバー束としてとらえて、ダイナミックに議論をしていく。

そのことを踏まえて、本質的には「ツイスター理論とは、ダブル・ファイバー束を通して、異なる幾何構造の双対性をみる」という立場をとっていく。通常のいろいろな双対性と違って、幾何構造の土台となる空間の次元は一般には異なっている。

微分方程式、幾何構造、そしてツイスター理論を三位一体として、研究をすすめていく。ふつう、ツイスター理論の部分は Lie 群と置くのが、Lie や Cartan 以来の思想、理念であるが、対称性を表わす Lie 群は平坦なツイスター理論の自己同型群として当然のように顔を出すから表には出さないことにした。

一方の空間の幾何構造に付随した微分方程式、微分式系、特性系自身や解を、他方の空間の幾何構造に付随した部分多様体、関数から構成していく。双対的に立場を逆にして、同様な方法でやっていく。

２．研究の目的

ツイスター理論を展開していく土台の典型的な空間は旗多様体である。すなわち、次数つき Lie 代数とそれから定義される旗多様体に関する放物幾何、巾零幾何、および非ホロノーム幾何である。その空間の幾何構造をモデル空間の平坦な幾何構造として曲がったものも考えていく。1 つの Dynkin 図形からのトップ空間も含めた 3 つの旗多様体によるダブル・ファイバー束が自然に作られる。

調べる微分方程式として、常微分方程式ではパス幾何、Clairaut 方程式、偏微分方程式では線形で Laplace 方程式、超幾何方程式、非線形で Monge-Ampere 方程式、Goursat 方程式とそれらの一般化したもの、発展させたものをあつかう。その他に、Lie 代数表現に付随した微分方程式や可積分な時空をあつかう。

３．研究の方法

研究テーマの中心であるツイスター理論は、多岐の分野に関連している。数学としては、微分幾何、代数幾何、位相幾何などの幾何の他に、微分方程式、複素関数論、表現論、特異点論等であり、物理としては、相対性理論、量子力学、場の理論、超弦理論の他に、古典・量子光学、可積分系の数理物理等のそれぞれ多くの分野にまたがっている。

研究代表者は、中心テーマであるツイスター理論を主に掘り下げていき、専門の微分幾何をはじめ、微分方程式、物理の相対性理論、超弦理論、可積分系などに関わり、各連携研究者には、他の上記の関連分野に補ってもらった。

各連携研究者を含めて他の研究者との情報交換、及び議論が必要なためセミナー、研究会をほぼ定期的に行なった。いろいろな関連するセミナー、研究会に参加し、研究発表してその反応、評価をみることも大事であるし、他の研究者の講演から参考、刺激を受けることも大事であった。

４．研究成果

(1) コーン構造、Lagrange コーン構造に付随した微分方程式-----

単独２階偏微分方程式において、階数１かつ可積分な Monge 系をもつものを Goursat 方程式という。独立 2 変数のとき、Cartan は Goursat 方程式のある種の方程式の無限小接触変換群が例外群 G_2 の Lie 代数であり、3 次元の２次微分の空間である曲線の接線曲面であることを示した。どうしてそういうことが言えるのか、そして一般化があるのかを考察した。

接触多様体上に Lagrange コーン場が与えれると、各点で接触分布の射影化された接触射影空間の Legendre 部分多様体ができる。それの Lagrange・Grassmann-接触射影双対をとることによって超曲面である終結多様体ができる。定義方程式である終結式を、空間全体に広げることによって Goursat 方程式が構成できる。Lagrange コーン場に付随した２階偏微分方程式を構成したことになる。接触旗多様体における不変 3 次 Lagrange コーン構造が、C 型を除いて、退化した A 型、可約な BD 型、既約な例外型として存在する。そのことから、Lagrange コーン場に付随した 2 階偏微分方程式が構成される。解の構成が、Monge パス全体の空間とのツイスター図式を通しておこなわれる。

多様体上にコーン場が与えられると、各点で接空間の射影化された射影空間の部分多様体ができる。それの射影双対をとることによって超曲面（仮定）である判別多様体ができる。定義方程式である判別式を、空間全体に広げることによって、コーン場に付随した１階偏微分方程式が構成できる。旗多様体の Hermite 対称空間における不変コーン構造、および射影双対の判別多様体が分類されている。そのことから、コーン場に付随した 1 階偏微分方程式が構成される。解の構成が、ある種のツイスター図式を通しておこなわれる。

通常のパス幾何、Legendre パス幾何を拡張する形で、Lagrange コーン場に付随した微分方程式から Monge パス幾何を定義した。射影

化された Lagrange コーンのファイバーをもつファイバー束上のトートロジカル分布における部分接続が Monge パス幾何を与える。Monge パス全体の空間が接触多様体のツイスター空間を与えて、Lagrange コーン場に付随した微分方程式に重要な役割をはたす。また、Monge パス幾何の同値問題が考えられる。

(2) 射影構造とコーン構造のツイスター対応-----

C_2=B_2 および A_3=D_3 の平坦なツイスター対応からより一般の関係をみていく．4 次元シンプレクティックベクトル空間から誘導される C_2=B_2 対応は 3 次元射影接触構造と 3 次元(2,1)型共形構造の関係で，4 次元ベクトル空間から誘導される A_3=D_3 対応は 5 次元 Lagrange 接触構造と 4 次元(2,2)型共形構造の関係である．C_2=B_2 対応を拡張して，正規型 3 階常微分方程式を考えることと 3 次元解空間が凸コーン構造をもつことは同値である．A_3=D_3 対応を拡張して，積分可能な連立２階偏微分方程式系を考えることと 4 次元解空間が凸コーン構造をもつことは同値である．以上を示したが，Wunschmann 不変量が 0 であれば解空間が共形（ヌル）構造をもつことが知られているが，0 であるなしにかかわらず一般化したことになる．証明の過程で，1 ジェット空間は部分接続を有する接触構造をもつ，そして 2 ジェット空間は水平方向の分離構造をもつことが重要である．

C_2=B_2 対応の場合に，ツイスター図式の２つの下部空間のそれぞれの Legendre 曲線とヌル曲線から構成されたそれぞれのツイスター空間での接線曲面の特異性の現われ方の違いを調べた．左の空間を接触空間，右の空間を共形空間とすると，(カスプ型，カスプ型)，(Mond 曲面，折り込まれたひだ)，(折り込まれたひだ，Scherbak 曲面)になる．さらに，閉 Legendre 曲線と閉ヌル曲線の対応に関する指数の対応を調べた．

(3) Clairaut 方程式-----

ふつうは微分方程式の解の種類として、一般解、特殊解に続いて特異解の例として取り上げられる。Clairaut 方程式の本質は、ツイスター空間で定義された幾何構造に付随した曲線のツイスター対応による直線族の共通の性質として得られることを示し、その曲線の双対曲線が包絡線であることを明らかにした。

その立場から、直線群をいろいろな次元のいろいろな種類の平面群として、多様な Clairaut 方程式に拡張できる。そのとき微分方程式は、常微分、偏微分であったり、単独、連立であったり、非拘束、拘束であったりする。

A_n 型 Clairaut 方程式の場合は、通常の１階 Clairaut 微分方程式は A_2 型である。C_n 型 Clairaut 方程式の場合は、2 階 Legendre・Clairaut 方程式は C_2 型である。B_n,D_n 型 Clairaut 方程式の場合は、1 階ヌル Clairaut 方程式は B_2 型である。

(4) Lagrange 対をもつ Monge-Ampere 系-----

Monge-Ampere 方程式を内在的に拡張した Monge-Ampere 系は、2n+1 次元接触多様体において接触形式と n-形式によって生成された外微分式系のことである。Hesse 型=一定を内在的にとらえて 3 つの型：分解可能型、双分解可能型、複素分解可能型を考察した。分解可能型は Hesse 型=0,Gauss 曲率 K=0 を一般化したものである。自然な特性系をもつ。Lagrange 型と非 Lagrange 型に分けられる。双分解可能型は Hesse 型=定数（非 0）,Gauss 曲率 K=定数(非 0)を一般化したものである。接触分布が Lagrange 対に分解される幾何的意味をもつ。G 構造として G=SL(n)が関係する。複素分解可能型は 2 独立変数の Laplace 方程式、平均曲率 H=0（極小曲面）のみならず H=一定（CMC 曲面）を一般化したものである。G 構造として G=SU(n)が関係する。

2 と 3 独立変数の場合に、Legendre ダブル・ファイバー束を通して、Hesse 型=一定と Gauss 曲率 K=一定の方程式に対する幾何的解の接触多様体 J^1(2,1)=R^5 から J^0(2,1)=R^3 への射影の特異点のおこりうる型を分類した。2 独立変数の場合：非 0 のとき、はめ込みとはめ込み、カスプ型とカスプ型、ツバメの尾とカスプ型、カスプ型とツバメの尾、以上４つになる。0 のとき、一方の特異点としてカスプ型、ツバメの尾のみがおこり、他方は空間曲線に崩壊する。3 独立変数の場合：さらに特異点として、蝶、ピラミッド（楕円的へそ）、財布（双曲的へそ）、カスプ・コーン、コーン・コーンが加わり、11 に分けられる。

(5) Lie 代数の表現に付随した微分方程式系と Grassmann 多様体の部分多様体の外在的幾何-----

次数つき Lie 代数の表現に付随してフィルターつき多様体上に微分方程式系のクラスが定まる。その中で線形で有限型積分可能なもののなすクラスでの同値問題は、射影幾何、Grassmann 幾何、さらには旗多様体での部分多様体の外在的幾何に対応する。特に、Lie 代数が半単純であるとき、線形有限型積分可能な微分方程式系の不変量は背足理論を拡張して求められる。構造関数による不変量、Lie 代数コホモロジーの消滅と剛性の関係が明らかになった。射影空間、共形空間を除いた第 1 種旗多様体や例外型旗多様体上の微分方程式系はモデル方程式系に同型、対応するモデルうめ込みは剛性をもつことがわかる。

接触射影空間の場合にはk次対称積表現からのk次Veroneseうめ込みや、$A_2(SL(3))$型3次元 Lagrange 接触空間の場合には随伴表現からの随伴多様体に、それぞれモデルと同値でないうめ込みが存在する。

3次元射影空間の中の曲面は、so(2,2)の4次元の標準表現からのSegreうめ込みである。付随する微分方程式系は$u_{xx}=0, u_{yy}=0$である。それに対して、3 次元接触空間は、7 次元射影空間で考えるべきであろう。sl(3)の8次元の随伴表現からの随伴多様体である。階数2の接触分布が1次元ずつに分解している。付随する微分方程式系は$X^2u=0, Y^2u=0$である。ここで$[X,Y]=Z$ である。不変量の明示的な表示や非自明な例を考察した。

旗多様体のダブル・ファイバー束におけるツイスター図式を通して、一般に次元の違うツイスターBacklund変換を構成した。

(6) 6 次元近 Kaehler 多様体の可積分な場-----

SU(3)構造をもつ 6 次元多様体とその上の主 H 束において、SU(3)型 H インスタントンを定義して、運動方程式、作用積分を導出した。特に、近Kaehler多様体を考える。等質空間として、6次元球面S^6, $S^3\times S^3$, 4次元の S^4, CP^2 のツイスター空間であるそれぞれCP^3, F_{12}の4つがある。可積分な場を考える。

可換なゲージ場である U(1)インスタントンを、CP^3, F_{12}上の複素Hopf束から構成しモジュライも考えた。CP^3, F_{12} はEinstein-Kaehlerとみないで近Kaehlerとみることが大事である。他の S^6, $S^3\times S^3$ では U(1)インスタントンは自明なものしか存在しない。

非可換なゲージ場である SU(3)インスタントンを、S^6 を $G_2/SU(3)$とみなして G_2 の等質性から構成した。モジュライ空間が7次元球であることを、8次元4元Kaehler多様体上のYang-Mills型のSp(2)インスタントンの理論をツイスター理論を通して適用することによって示すことができた。

重力場の立場として、$S^3\times S^3$上に標準的以外になめらかで大域的な近 Kaeheler 計量を 5 次元の $S^3\times S^2$ 上の非自明なSasaki-Einstein 計量をもとに構成することを、まず不定値型のときに構成した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

①待田芳徳、Clairaut方程式とツイスター理論，数理研講究録，査読無，1664,2009,pp.56-67

②待田芳徳、高橋雅朋、Classifications of implict second order ordinary differential equations of Clairaut type, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 査読有、138, 2008, pp.821-842

③待田芳徳、Integral representations of solutions to the sub-Laplace equations by twistor theory, JP J. Geometry Topology, 査読有、7, 2007, pp.1-22

④待田芳徳、石川剛郎、Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant Gaussian curvature, International J. Math. 査読有、17, 2006, pp.269-293

⑤待田芳徳、石川剛郎、Extra singularities of geometric solutions to Monge-Ampere equations, 数理研講究録、査読無、1502, 2006, pp.41-53

⑥待田芳徳、Goursat equations and twistor theory, 数理研講究録、査読無、1502, 2006, pp.125-139

〔学会発表〕（計１２件）

①待田芳徳、Lie 代数の表現に付随した微分方程式系とGrassmann部分多様体の外在的幾何、日本数学会・秋季総合分科会、2009年9月25日、大阪大学

②待田芳徳、Clairaut equations and twistor theory, Internatinal workshop on singularities in general geometry and applicationas, 2009年3月27日、スペイン・バレンシア

③待田芳徳、Differential equations associated with cone fields, School and mini-workshop on geometry of ODE’s and vector distributions, 2009年1月5日、ポーランド・ワルシャワ

④待田芳徳、一般型常微分方程式の同値問題、微分方程式と微分幾何学への応用特異点論、2008年12月9日、京都大学数理解析研究所

⑤待田芳徳、Integrable fields on manifolds with SU(3)-structure, RIMS international conference on geometry related to integrable systems, 2007年9月29日、京都大学数理解析研究所

⑥待田芳徳、Differential equations associated with cone structures, 10th international conference on differential geometry and its applications, 2007年8月29日、チェコ・オロモウツ

６．研究組織
(1)研究代表者
　待田　芳徳　(MACHIDA YOSHINORI)
　沼津工業高等専門学校・教養科・准教授
　研究者番号：９０１４１８９５

(2)研究分担者
　　　　　　　(　　)

　研究者番号：

(3)連携研究者
　石川　剛郎　 (ISHIKAWA GOO)
　北海道大学・理学研究科・教授
　研究者番号：５０１７６１６１

　森本　徹　(MORIMOTO TOHRU)
　奈良女子大学・名誉教授
　研究者番号：８００２５４６０

　藤井　一幸　(FUJII KAZUYUKI)
　横浜市立大学・総合科学部・教授
　研究者番号：００１２８０８４

　高橋　雅朋　(TAKAHASHI MASATOMO)
　室蘭工業大学・ひと文化系・講師
　研究者番号：８０４３１３０２

　佐藤　肇　(SATO HAJIME)
　名古屋大学・名誉教授
　研究者番号：３００１１６１２