

平成 21 年 4 月 10 日現在

研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18540127
 研究課題名（和文） 熱対流問題の解の大域構造に対する計算機援用証明
 研究課題名（英文） Computer-assisted proofs for the global solution structures of heat convection problems
 研究代表者
 渡部 善隆 (WATANABE YOSHITAKA)
 九州大学・情報基盤研究開発センター・准教授
 研究者番号：90243972

研究成果の概要：Rayleigh-Bénard 問題を記述する Oberbeck-Boussinesq 方程式の解空間の大域的構造を計算機援用により 2 次元および 3 次元問題に対して解明した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,100,000	0	1,100,000
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	510,000	3,310,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：熱対流問題，計算機援用証明，精度保証付き数値計算

1. 研究開始当初の背景

容器に入れられた静止した液体を下から一様に加熱すると，上下面の温度差が小さいときは液体は静止したままであるが，温度差がある臨界値を越えると不安定化を起し，対流が発生する．この現象は 1900 年に Bénard によって報告され，1916 年に Rayleigh が数理モデルの定式化に成功したことから，Rayleigh-Bénard 問題として広く知られている．

Rayleigh-Bénard 問題については，形成される熱対流パターンの多様さ，美しさなどから，数多くの研究がなされてきた．しかしながら，数理モデルの支配方程式は非線形偏微分方程式であり，解は無限次元の関数空間に属する．そのため，一般に解析的取り扱い

困難であり，これまでの数学的な結果のほとんどは対流が発生する臨界値の近傍での議論に限られ，それ以外は計算機による近似的な結果に頼らざるを得なかった．

計算機で実行できる実数値の計算は有限桁の浮動小数点数による近似計算であり，その演算結果には丸め誤差と呼ばれる近似誤差が生じる．近年，浮動小数点演算における丸め誤差を含む演算結果の保証が理論的にも実用的にも高い精度で効率よく実現できることが明らかにされ，計算結果の信頼性（品質保証）の問題が計算理工学分野で広く取り上げられることとなった．さらに，計算結果の信頼性の問題は数値解法アルゴリズムそのものにも影響を与え，様々な数理科学上に現れる問題の解それ自体を数学的な厳

密さで検証するという方向にまで進展しつつある。この種の数値計算法は計算機援用証明または精度保証付き数値計算法と呼ばれ、科学技術計算のあるべき一つの方向として考えられている。

2. 研究の目的

本研究は、Rayleigh-Bénard 問題を記述する Oberbeck-Boussinesq 方程式に対し、その解空間の大域的構造を計算機援用証明によって究明することを目的とする。

3. 研究の方法

精度保証付き数値計算の偏微分方程式への適用が困難な理由には、解の存在範囲を特定する区間の微分不可能性があった。これを克服するために、解を求めるための関数空間上の無限次元計算を、有限次元空間に射影する概念と射影誤差の概念を導入することにより計算機内の有限操作の問題に帰着させる。このことにより、区間の持つ難点を解消し同時にその特徴も有効に活かすことができ、自然な形で計算機による解の存在検証理論が導びかれる。この着想はまったく独創的なものであり、従来からの偏微分方程式の近似解法との親和性においてすぐれ、汎用性にも富んだ検証法であることが期待される。

4. 研究成果

- (1) 従来のSchauderの不動点定理に基づいて開発された検証アルゴリズムを、Banachの不動点定理を用いた局所一意性をも保証する存在検証手法に拡張した。さらに、精度保証付き数値計算に対するアルゴリズムレベルおよびプログラムレベルでの効率化を実現しながら、これまで得られた以上の大きなRayleigh数に対する局所一意性をともなう非自明解の手法を確立した。
- (2) 熱伝導解（自明解）は、流体の物性値によらず任意のRayleigh数に対して存在し、摂動方程式系として見た場合の零解に対応している。したがって、自明解からの分岐点の存在を検証するには、方程式を線形化・対称化した固有値問題を考える必要がある。無限次元固有値問題を精度保証付き数値計算手法で解くことにより、臨界Rayleigh数以外に対しても存在が予想されている自明な熱伝導

解からの分岐点の存在検証のために必要な、線形化方程式の単射性の十分条件を導くことに成功した。

- (3) (1)(2) で導出した計算機援用証明アルゴリズムの有効性を検証するため、非自明解がさらに不安定化を起こすと予想されている二次分岐点に対する数値的存在検証に取り組み、対称性破壊分岐点の検証に成功した。この結果は計算機において発生する浮動小数点演算の丸め誤差を考慮に入れた区間演算ソフトウェアを用いた実装結果であり、数学的な厳密さを保証する結果である。あわせて、数値計算の効率化にも配慮し、特に線形計算の精度保証付き数値計算の実装技術に関する分野における寄与も視野に入れた実装を行った。
- (4) Rayleigh 数をパラメータとする分岐曲線を連続的に追跡するホモトピー的手法について理論的な検討を行い、非自明解同士および非自明解と分岐点を結合することにより、臨界点で熱伝導解からの分岐を起こした後の解曲線を連続的に追跡するアルゴリズム構築の道筋を与えた。具体的には、Rayleigh 数を微小な区間に属する任意の値として連続的に表現し、その区間に対する解の局所一意性付き数値計算と陰関数定理との併用により解をパラメータ連続的に包み込んでいく手法の着想を得た。さらに、局所一意性付き検証アルゴリズムおよび実装を行い、数値実験によりその有効性を確認した。
- (5) 3次元熱対流問題に対する精度保証付き数値計算に取り組み、自明解からの不安定化を起こす臨界Rayleigh数直後の矩形解の存在検証に続き、ベナールセルと呼ばれる蜂の巣状のセルの存在証明に成功した。さらに、大域的構造を明らかにするための検証手法について理論・数値計算手法両面から考察を与えると同時に、Navier-Stokes 方程式で記述されるKolmogorov問題に対する局所一意性をともなう非自明解の存在検証に成功した。
- (6) 流体の安定性を記述する非自己共役複素固有値問題であるOrr-Sommerfeld方程式に対する固有対の包み込みの計算機援用証明アルゴリズムを提案し、丸め誤差を考慮した数学的に厳密な数値計算により不安定化を起すパラメータ

の特定に成功した。あわせて固有値の非存在範囲の特定に関する着想を得、丸め誤差を考慮した数学的に厳密な数値計算によって、特定のパラメータにおける安定性の検証結果を得ることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- ① Yoshitaka Watanabe,
A numerical verification method for two-coupled elliptic partial differential equations, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics (採録決定), 査読有.
- ② Yoshitaka Watanabe and Mitsuhiro T. Nakao,
Numerical verification method of solutions for elliptic equations and its application to the Rayleigh-Bénard problem, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics (採録決定), 査読有.
- ③ Yoshitaka Watanabe, Michael Plum, Mitsuhiro T. Nakao,
A computer-assisted instability proof for the Orr-Sommerfeld problem with Poiseuille flow, Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM), 査読有, Vol. 89, No. 1, 5-18, 2009.
- ④ Yoshitaka Watanabe,
A computer-assisted proof for the Kolmogorov flows of incompressible viscous fluid, Journal of Computational and Applied Mathematics, 査読有, Vol. 223, 953-966, 2009.
- ⑤ Myoungnyoun Kim, Mitsuhiro T. Nakao, Yoshitaka Watanabe and Takaaki Nishida, A numerical verification method of bifurcating solutions for 3-dimensional Rayleigh-Bénard problems, Numerische Mathematik, 査読有, Vol. 111, No. 3, 389-406, 2009.
- ⑥ 渡部 善隆, Michael Plum, 中尾 充宏, 並行Poiseuille流れの不安定性に対する計算機援用証明, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1614, 11-19, 2008.
- ⑦ 渡部 善隆,
Some computer assisted proofs on the bifurcation structure of solutions for the Rayleigh-Bénard problem, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1536, 87-96, 2007.
- ⑧ Kaori Nagatou,
Validated computation for infinite dimensional eigenvalue problems, IEEE Computer Society, 査読有, 2007.
- ⑨ Takeshi Nanri, Yoshitaka Watanabe and Hiroyuki Sato,
Performance comparison of vector calculations between Itanium2 and other processors, Proceedings of International Workshop on Innovative Architecture, 査読有, 141-146, 2006.
- ⑩ 渡部 善隆,
Rayleigh-Bénard問題の大域分岐構造に対する精度保証付き数値計算, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1505, 101-105, 2006.
- ⑪ Yoshitaka Watanabe,
A numerical verification for the Kolmogorov flows of incompressible viscous fluid, Proceedings of the international Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2006, 査読有, ICNAAM-2006 Extended Abstracts, 535-539, 2006.
- ⑫ Myoungnyoun Kim, Mitsuhiro T. Nakao, Yoshitaka Watanabe and Takaaki Nishida, Some computer assisted proofs on three dimensional heat convection problems, Proceedings of 2006 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2006), 査読無, pp. 427-430, 2006.
- ⑬ Yoshitaka Watanabe,
A computer-assisted proof for the Kolmogorov flows of incompressible viscous fluid, Proceedings of 2006 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2006), 査読無, pp. 431-434, 2006.
- ⑭ Mitsuhiro T. Nakao, Yoshitaka Watanabe, Nobito Yamamoto and Takaaki Nishida, A numerical verification of bifurcation points for nonlinear heat convection problems, The proceedings of 2nd International conference "From Scientific Computing to Computational Engineering" (2nd IC-SCCE), 8pages, July 2006. 査読有.

[学会発表] (計 28 件)

- ① Yoshitaka Watanabe:
A verified eigenvalue excluding method for the Orr-Sommerfeld problem with Poiseuille flow, International Workshop on Numerical Verification

- and its Applications 2009 (INVA2009), March 22-29, 2009, Hotel Breeze Bay Marina, Miyako Island, Japan. 2009. 3. 24.
- ② Yoshitaka Watanabe:
A computer-assisted stability proof for the Orr-Sommerfeld problem with Poiseuille flow, International workshop on verified computations and related topics, March 7-10, 2009, University of Karlsruhe (TH), Germany. COE Lecture Note, Vol.15, Faculty of Mathematics, Kyushu University, pp.122-123. 2009. 3. 8.
- ③ 渡部 善隆, 中尾 充宏, Michael Plum, 長藤 かおり:
ある非自己共役作用素の複素固有値の除外に対する数値的検証法, 応用数学合同研究集会報告集 pp.163-166, 龍谷大学, 2008年12月.
- ④ 渡部 善隆:
Orr-Sommerfeld方程式の固有値に対する計算機援用非存在証明, 基盤(S)合同研究集会「流れ問題のための高品質数値解法と計算機援用解析学」KKRホテル金沢 2008年11月.
- ⑤ Kaori Nagatou, Yoshitaka Watanabe, Shigeki Yamamoto and Takehiko Kinoshita:
Validated computations for elliptic systems of FitzHugh-Nagumo type, 13th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (SCAN 2008), September 29 - October 3, 2008, El Paso, USA.
- ⑥ 長藤 かおり, 渡部 善隆, 山本 成樹, 木下 武彦:
FitzHugh-Nagumo 型反応拡散方程式系に対する数値的検証法, 日本数学会 2008年度秋季総合分科会, 東京工業大学, 2008年9月.
- ⑦ 渡部 善隆, 長藤 かおり, 山本 成樹, 木下 武彦:
FitzHugh-Nagumo型反応拡散方程式系に対する精度保証付き数値計算, 日本応用数学会 2008年度年会, 東京大学, 2008年9月.
- ⑧ 中尾 充宏, 渡部 善隆:
無限次元非線形システムの精度保証付きパラメータ同定技法について, 産業技術数理研究センター第4回ワークショップ, 九州大学, 2008年9月.
- ⑨ 渡部 善隆:
科学技術計算の品質保証, 先駆的科学計算に関するフォーラム 2008~高精度・多倍長計算~, 九州大学, 2008年8月.
- ⑩ 渡部 善隆:
解けたらうれしい線形方程式, 計算工学講演会論文集 Vol.13, pp.697-700, 仙台市民会館, 2008年5月.
- ⑪ 渡部 善隆, Michael Plum, 長藤 かおり, 中尾 充宏:
A computer-assisted instability proof for the plane Poiseuille flow, 応用数学合同研究集会報告集 pp.198-199, 龍谷大学, 2007年12月.
- ⑫ Yoshitaka Watanabe:
Computer assisted proofs of solutions for nonlinear heat convection problems, International Workshop on Numerical Verification and its Applications (INVA2008), March 1-7, 2008, Tokyo Dai-ichi Hotel Okinawa Grand Mer Resort.
- ⑬ 渡部 善隆, Michael Plum, 長藤 かおり, 中尾 充宏:
A computer-assisted instability proof for the plane Poiseuille flow, 応用数学合同研究集会報告集 pp.198-199, 龍谷大学, 2007年12月.
- ⑭ 渡部 善隆:
センター計算機群に対する実アプリケーションに即した性能評価, RIITフォーラム 2007 (2007年度九州大学情報基盤研究開発センター研究発表会), 九州大学留学生センター国際ホール, 2007年12月.
- ⑮ Yoshitaka Watanabe:
Some computer-assisted proofs for nonlinear heat convection problems, 2007 Taiwan-Japan Joint workshop on Numerical Analysis and Scientific Computation, November 30-December 2, 2007, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Nankang, Taipei, the Republic of China. Program and Abstracts pp.17.
- ⑯ 渡部 善隆:
並行 Poiseuille 流れの安定性に関する計算機援用解析, 研究集会・流れ問題のための高品質数値解法と精度保証計算, 島根県民会館, 松江市, 2007年11月.
- ⑰ 渡部 善隆:
反応拡散方程式系の解に対する計算機援用証明, 九州大学数値解析学セミナー, 九州大学大学院数理学研究院, 2007年10月.
- ⑱ Yoshitaka Watanabe:
A computer-assisted proof of solutions for an elliptic system of reaction-diffusion equations, 「精度

- 保証付き数値計算とその周辺」ワークショップ，岐阜大学地域科学部，2007年10月.
- ⑲ 渡部 善隆：
ある反応拡散方程式系に対する精度保証付き数値計算，日本数学会2007年度秋季総合分科会，応用数学分科会講演アブストラクト，pp155-158，東北大学，2007年9月.
- ⑳ 渡部 善隆：
対称疎行列の精度保証付き正定値判定計算におけるオーダリングの効用，日本応用数理学会2007年度年会講演予稿集，pp224-225，北海道大学，2007年9月.
- 21 Yoshitaka Watanabe, Myoungnyoun Kim, Mitsuhiro T. Nakao and Takaaki Nishida:
A computer-assisted proof of solutions for three dimensional nonlinear heat convection problems, INSF2007: International Conference on Recent Developments of Numerical Schemes for Flow Problems, June 27-29, 2007, Kyushu University Nishijin Plaza. Book of Abstracts pp.159-162.
- 22 渡部 善隆：
疎行列に対する線形方程式の直接解法を用いた固有値・特異値計算，第2回計算科学研究ステーション研究集会，電気通信大学情報工学科，2007年3月.
- 23 Yoshitaka Watanabe：
A computer-assisted proof of the existence of Bénard cells for the heat convection problems, International Workshop on Numerical Verification and its Applications (INVA2007), February 26-March 3, 2007, Waseda University.
- 24 渡部 善隆：
疎行列に対する連立1次方程式の直接解法を援用した固有値・特異値計算，第11回情報・統計科学シンポジウム，九州大学留学生会館国際ホール，2006年12月.
- 25 渡部 善隆，Myoungnyoun Kim，西田 孝明，中尾 充宏：
3次元熱対流問題に対する解の数値的検証について，研究集会・流れ問題の数値解析と精度保証付き数値計算，ブケ東海静岡(静岡市)，2006年11月.
- 26 Myoungnyoun Kim, Mitsuhiro T. Nakao, Yoshitaka Watanabe, Takaaki Nishida:
A numerical verification method of bifurcating solutions for 3-dimensional Rayleigh-Bénard problems, 12th GAMM-IMACS

International Symposion on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics, September 26-29, 2006, Duisburg, Germany.

- 27 渡部 善隆：
非対称疎行列に対する連立1次方程式の直接解法を用いた特異値計算，第10回環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム講演予稿集，pp70-73，沖縄県青年会館，2006年7月.
- 28 渡部 善隆，中尾 充宏，山本 野人，西田 孝明：
計算機援用証明による熱対流問題の分岐点の存在検証，九州大学数値解析学セミナー，九州大学大学院数理学研究院，2006年4月.

[その他]

ホームページ等

<http://www.cc.kyushu-u.ac.jp/RD/watanabe/>

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~nagatou/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

渡部 善隆 (WATANABE YOSHITAKA)

九州大学・情報基盤研究開発センター・准教授
研究者番号：90243972

(2) 研究分担者(2006, 2007年度)

長藤 かおり (NAGATOU KAORI)

九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号：40326426

(3) 連携研究者(2008年度)

長藤 かおり (NAGATOU KAORI)

九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号：40326426