様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２２　年　４　月　６　日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００６～２００９
課題番号：１８５４０１３０
研究課題名（和文）　ランダムな解析関数の零点過程の研究

研究課題名（英文）　Zero processes of random analytic functions

研究代表者
白井　朋之　(SHIRAI TOMOYUKI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：７０３０２９３２

研究成果の概要（和文）：ランダム行列の固有値に代表されるランダムな多項式（解析関数）の零点は複素平面内のランダムな点配置を与える。これは、平面内に一様分布に従って、点をばらまいた時に得られるいわゆるポアソン点配置とは性質が異なり、お互いの点が反発的であるような点配置となる。本研究ではこの二つの点過程の性質の違いを明らかにする研究を行った。

研究成果の概要（英文）：The zeros of a random polynomial (or a random analytic function) form a random point configuration in the complex plane. This is different from the so-called Poisson random configuration which is obtained by uniformly random sampling in the complex plane, and their points are mutually repulsive nature while Poisson random points often form weak clustering. We clarify the difference of these point configurations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,000,000	0	1,000,000
2007 年度	800,000	240,000	1,040,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総　計	3,500,000	750,000	4,250,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：確率論，フェルミオン点過程，大偏差原理，Ginibre 点過程，ランダム行列，α 行列式

１．研究開始当初の背景
ランダム行列の導入は２０世紀初頭の Fischer, Wishart ら数理統計学にあると言われている．その後１９６０年代に Wigner, Dyson, Mehta などの物理学者らは，複雑な多体系，例えば原子核のように系のハミルトニアンを決定するのが困難な状況で，具体的なハミルトニアンの形を与えるのを放棄するかわりに対称性だけに着目してランダムなハミルトニアン(つまり，ランダム行列)を導入した．それ以降ランダム行列の研究はさらに活発化した．ランダム行列の研究において特に重要なのは，エネルギーに相当する固有値の分布とその行列サイズ無限大におけ

る漸近挙動の問題である．行列サイズを無限大にしたときの漸近挙動を考えるときには，形式的には無限個の固有値のようなものを扱っていると考えられるが，あくまで有限個の固有値の極限として無限個をとらえることができるのであって，無限次元行列の固有値として無限個をとらえることは現在のところはできていない．しかし，行列から固有値を定める写像によって，行列空間上の確率分布から固有値の点過程(=ランダムな点配置)が誘導されていることを一旦忘れて，(有限個の)ランダムな固有値がもつ点過程としての性質のみに着目して，その性質を保ったまま無限個の点をもつ点過程に拡張すれば，有限からの極限ではなく初めから無限個の点過程を扱うことが可能になる．このような考えのもとほぼ同時期に独立に A.Soshnikov と T.Shirai-Y.Takahashi によって一般化されたのが，現在行列式点過程もしくはフェルミオン点過程とよばれている点過程である．GUE と呼ばれる特別なランダム行列の固有値はフェルミオン点過程となる．この一般化によって無相関の典型例であるポアソン点過程とは異なる，一般に長距離の相関を持つ点過程の重要なクラスが得られた．フェルミオン点過程はその自然さゆえ，数学の至るところにあらわれることが知られるようになってきたが，最近，複素ガウス分布を係数に持つランダム巾級数の零点過程(零点のなす点過程) がフェルミオン点過程のクラスに入ることが Y.Peres-B.Virág によって示された．これまでのランダム巾級数の研究の中でもとりわけ重要な結果の一つであるが，これはフェルミオン点過程という対象が定義されて初めて特徴付けが可能な定理であった．また，ランダム行列の固有値もランダムな解析関数(多項式)の零点過程であるから，一見素性の違うランダムな解析関数の零点過程が同じフェルミオン点過程のクラスに入ることは注目されていた．

２．研究の目的

本研究の目的は，様々な形で定義されるランダムな解析関数とそれに関連する点過程の極限定理について調べることにある．

(1) フェルミオン点過程の大偏差原理と中心極限定理：独立同分布な標準複素ガウス分布を係数とするランダムなベキ級数はランダムな解析関数を与え，その零点は離散的であり点過程を定義する．研究当初 M.Sodin-B.Tsirelson はあるランダムな整関数の零点過程に対して，半径 r 内に零点が存在しない事象 A_r の確率 $P(A_r)$ がほぼ $\exp(-C\ r^4)$ の速さで減衰することを示していた．しかし，$\log P(A_r)/r^4$ の $r\to\infty$ での極限の存在までは知られていなかった.(現在は A.Nishry によって極限の存在とその値も求められている．）この零点過程に近い Ginibre 点過程などのフェルミオン点過程について同様の問題を考察し，特に中心極限定理と大偏差原理に関してより詳しい結果を示し，Sodin-Tsirelson の結果を精密化することを目的とする．

(2) フェルミオン点過程の一般化の問題：一次元分布においては二項分布に１パラメータを導入することにより，負の二項分布や一般化された二項分布に拡張することができる．この拡張の無限次元化として，フェルミオン点過程を α 行列式点過程と呼ばれる実数の１パラメータ α を含む点過程に拡張する研究を以前行なって部分的な結果は得たが，まだ完全な結論には到達していない．この問題は行列式を一般化した α 行列式という行列変数の関数の正値性の問題と同値である．以前の研究である範囲の α については正値性が証明されており，一方，数値実験などによりあるパラメータの範囲では一般的には点過程を構成できないと予想しているが，このことを示す反例を見つけることは正値性を示すとともに考えるべき問題である．

(3) 解析関数，特にゼータ関数のランダム化した値の分布：古典的な種々のゼータ関数の値分布については解析数論において古くから詳しい研究がなされている．その解析の難しさの一つはゼータ関数がその定義自身にはランダムネスを含まないことにある．しかし，一方である種のランダムネスを内包するという結果も古くから知られており，そのランダムネスを特にリーマンのゼータ関数の臨界帯上で考察するのが目的である．

３．研究の方法

(1) 研究の背景でも述べたように，ランダムな解析関数の零点過程がフェルミオン点過程となる具体的な例がいくつか存在しているが，Sodin-Tsirelson が研究したランダム解析関数の零点過程はフェルミオン点過程ではないことは簡単に確かめられる．しかし，一方で Sodin-Tsirelson が問題にしている大偏差確率を研究する上では複素ガウス型ランダム行列の極限から得られる Ginibre 点過程も似たような振舞いをすることが期待されるので，Sodin-Tsirelson の零点過程のかわりに Ginibre 点過程やその他のフェルミオン点過程の大偏差のからくりを調べる．フェルミオン点過程は点過程が定義されて

いる空間 R 上のあるラドン測度 $d\lambda$ に関する２乗可積分な関数空間 $L^2(R, d\lambda)$ 上の積分核 $K(x,y)$ をもつ非負定値積分作用素のあるクラスをパラメータとして持つことが知られている．重要なフェルミオン点過程の例はいずれも $K(x,y)$ が正射影作用素によってあらわされるクラスに属し，特にランダム行列からの極限定理に普遍的にあらわれるものは積分核が具体的にわかっているものも多く，正弦核，ベッセル核，エアリ核などの特殊関数によってあらわされる．特に Ginibre 点過程は複素平面を底空間として，その上で定義される指数核と複素ガウス測度に付随するフェルミオン点過程である．フェルミオン点過程については，点の個数などの統計的性質が従来の無相関のポアソン点過程とは異なる特別な性質を満たすことが知られている．ポアソンの場合に比べれば少し取り扱いが難しいが十分解析可能である．フェルミオン点過程の場合に，個数分布に関する大偏差の問題を考えることが具体的な内容の１つであるが，大偏差の計算を実行するためには上記の積分核に対応する積分作用素を部分領域に制限した作用素の各固有値 $\lambda_n(t)$ の $t\to\infty$ としたときの詳しい漸近挙動が必要となる．例えば，ガウシアンユニタリアンサンブルに対応する場合は正弦核をもつ積分作用素の固有値の問題となるが，これはある 2 階の微分作用素の固有値問題と同値でありその固有関数はスフェロイダル関数として知られている．n を固定した場合の $\lambda_n(t)$ の $t\to\infty$ の漸近挙動は知られているが，ここで必要とされるのは $\lambda_n(t)$ の $n=at\to\infty$ の形の漸近挙動である．中心極限定理もこの固有値の漸近挙動が重要な役割を果たすので，固有値の詳しい情報を調べることが重要になる．

(2) フェルミオン点過程は(1)で述べたようにある積分作用素 K をパラメータとして持ちそのラプラス変換はフレドホルム行列式 $\mathrm{Det}(I-K_\phi)$ の形をしている．(K_ϕ は K から定まるある作用素)．このラプラス変換に $\mathrm{Det}(I+\alpha K_\phi)^{-1/\alpha}$ のように実数の１パラメータ α を導入すると，形式的には一般化された二項分布の点過程版に相当する点過程のラプラス変換となる．$\alpha=-1$ がフェルミオン点過程，$\alpha=0$ はポアソン点過程，$\alpha=1$ はボゾン点過程を定義する．しかし，それ以外の α については点過程の存在は明らかでない．ここで問題にしたいのは(あるクラスの) 任意の非負定値な作用素に対して，ラプラス変換が $\mathrm{Det}(I+\alpha K\phi)^{-1/\alpha}$ となるような点過程が存在する α の範囲を完全に決定することにある．この問題は前述のように，行列式の一般化である α 行列式が任意の非負定値行列に対して非負になるようなある α の範囲を決定することに帰着される．前年度までの研究から，実対称行列の場合には $\alpha>2$，エルミート対称の場合は $\alpha>1$ においては一般的には上記問題は否定的に解決されることを予想している．

(3) リーマンゼータ関数の臨界線上の値分布は様々な研究がなされている．特に平均値の理論は古くから様々な結果が得られている．平均値の理論とは臨界線上でゼータ関数のベキを積分することにより平滑化を行ない解析を容易にするテクニックと考えられる．これは，確率論的に言えば一様確率変数をゼータ関数に代入して平均したことに相当する．一方，Lifshits-Weber らによりコーシーランダムウォークをゼータ関数に代入して平均化するという手法も研究されている．本研究ではさらにこの結果の拡張となる α 対称安定過程によって平均化する場合の結果について考察する．

４．研究成果

(1) Ginibre 点過程の線形統計量に関する分散の退化性：Ginibre 点過程は複素平面における点過程の中で平行移動と回転に関して不変な点過程の重要な一例であり，複素正方行列で各成分が独立な標準複素ガウス分布に従うランダム行列の固有多項式，つまりガウス型のランダムな解析関数の零点過程の行列サイズ無限大の極限として得られるものである．この点過程は指数核の行列式を用いて相関関数があらわされる行列式点過程の典型的であり，また物理的には特別な温度における２次元の電荷のモデルとして知られ，その詳しい性質を調べることは物理的にも意味がある．以前からの研究で Ginibre 点過程のある半径の円内に含まれる固有値の個数という統計量について，半径が無限大での極限の様子を大偏差原理の立場から調べ，大偏差のオーダーが無相関のポアソン点過程であらわれるものとは違うことを示し，さらにその漸近係数をレート関数の形で完全に決定した．同様に同じ量の分散が半径の 1/2 乗分退化していることも示した．本研究では固有値の個数のみならず，固有値の原点からの距離のベキとその角度に付随する振動項との積としてあらわされる統計量とその摂動に関する分散の漸近挙動を調べて，同様の退化があらわれることを示した．

この結果とその一般化は，Ginibre 点過程を可逆測度とするダイナミクスを無限次元のダイソン型確率微分方程式の解を定義する際に，そのドリフト項を制御するために必要となる重要な評価である．さらに一般のフェルミオン点過程について同様の研究を行っていくことはダイソンモデル以外(例えばエアリー過程など)の研究をさらに進めていくために重要な課題である．

(2) ゼータ関数の臨界線上のランダムサンプリング：リーマンゼータ関数の臨界線上でα安定過程S_nを走らせてその路に沿ってゼータ関数の値のサンプリング平均を考える．つまり，$\zeta_n=\zeta(1/2+iS_n)$のチェザロ和を考える．特にその平均$E\zeta_n$はαによらず１に収束することが簡単な計算よりわかる．この収束のもう少し詳しいオーダーと確率変数ζ_nの分散を調べることが以降の解析にとって重要である．Lifshits-Weber のコーシーランダムウォークはα=1の場合に対応するが，そのとき分散は log n になることが示されていた．本研究では，$1 \le \alpha \le 2$ の場合に，平均が $1+O(n^{-1/\alpha})$，分散は $O(\log n)$，ζ_nとζ_mの共分散が $O(m^{-1/\alpha})\ (n\geq m)$ となることを示した．このことにより平均化した確率変数$\Sigma_{k=1}^{n}\zeta_k$が確率１で $n+O(n^{1-1/2\alpha}(\log n)^b)$ という漸近挙動をすることを示した．$1 \le \alpha \le 2$の場合は安定過程が再帰的な場合に対応するが，引き続き，$0<\alpha<1$ の場合，つまり非再帰的な場合についてこの研究をしていくことは，リンデレーフ予想を視野にしたとき重要な研究課題となる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

①Tomoyuki Shirai, A remark on monotonicity for the Glauber dynamics on finite graphs, Proceedings of the Japan Academy 86 (2010), 33-37. (Refereed)
②Tomoyuki Shirai, Variance of randomized values of Riemann's zeta function on the critical line, RIMS Kôkyûroku 1590 (2008), 86--96. (Not refereed)
③Takuya Ohwa and Tomoyuki Shirai, Joint distribution of the cover time and the last visited point of finite Markov chains, Kyushu Journal of Mathematics 62 (2008), 281-292. (Refereed)
④Hirohumi Osada and Tomoyuki Shirai, Variance of the linear statistics of the Ginibre random point field, RIMS Kokyuroku Bessatsu B6 (2008), 193-200. (Refereed)
⑤Tomoyuki Shirai, Remarks on the positivity of alpha-determinants, Kyushu Journal of Mathematics 61 (2007), 169-189. (Refereed)
⑥Tomoyuki Shirai, Large deviations for the fermion point process associated with the exponential kernel, Journal of Statistical Physics 123 (2006), 615-629. (Refereed)

〔学会発表〕（計６件）

①Tomoyuki Shirai, Determinantal point processes associated with certain reproducing kernels, The First CREST-SBM International Conference "Random Media", Jan. 25-29, 2010, Sendai International Center, Sendai, Japan.
②Tomoyuki Shirai, Ginibre-type determinantal processes, VIIIth Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, Oct. 7-9, 2009, University of Tokyo.
③Tomoyuki Shirai, Randomized values of Riemann's zeta function on the critical line, The 3rd Cheongju Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, Jan. 12-14, 2009, Chungbuk University.
④Tomoyuki Shirai, Random analytic functions and determinantal point processes, RIMS 共同研究「Ｌ関数の値分布に関係する数論的な諸関数の研究」, Jul. 1-4, 2008, RIMS, Kyoto.
⑤Tomoyuki Shirai, Determinantal processes associated with non-symmetric kernel, "Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems", Oct. 22-26, 2007, Nishijin Plaza, Fukuoka.
⑥Tomoyuki Shirai, Variance of randomized values of Riemann's zeta function on the critical line, Workshop "Number theory and probability theory", Oct. 15-16, 2007, RIMS-IIAS, Kyoto.

６．研究組織

(1) 研究代表者
白井　朋之（SHIRAI TOMOYUKI）
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：７０３０２９３２

(2)研究分担者

(3)連携研究者