

平成21年 3月31日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006年度～2009年度

課題番号：18540142

研究課題名(和文) 最小次数と連結度が相互作用するグラフと偶グラフの研究

研究課題名(英文) Research of graphs and even graphs operated by minimum degrees and connectivity

研究代表者

善本 潔 (YOSHIMOTO KIYOSHI)

日本大学・理工学部・講師

90307801

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：偶グラフ、Claw-free graph、線グラフ、2因子、hamilton cycle

1. 研究計画の概要

グラフ理論において最も重要な不変量である最小次数と連結度がグラフの構造に与える作用の研究。特に最近注目されている線グラフやその基グラフの偶グラフの研究を行う。

有名な Thomassen の予想「4連結線グラフはハミルトンサイクルを持つ」は Ryjacek 閉包を使うことにより線グラフの一般化である claw-free グラフについての Matthews と Sumner の予想「4連結 claw-free グラフはハミルトンサイクルを持つ」と同値であることが Ryjacek によって示されている。ハミルトンサイクルは連結成分が1個の2因子である。2因子の存在は、連結度を仮定することなく最小次数条件のみでその存在が保証される。即ち、「最小次数4以上の線グラフは2因子を持つ」が成り立つ。Ryjacek 閉包は2因子に対しても利用することが出来、この主張は線グラフを claw-free グラフに置き換えても成り立つ。従って、2因子の研究も線グラフについて行えば十分である。

線グラフはその元の基グラフから定義されるので、ハミルトンサイクルや2因子の問題は基グラフの問題に置き換えることが出来る。具体的には、基グラフが支配的な連結偶グラフや偶グラフを持てば、ハミルトンサイクルや2因子を持つ。従って偶グラフの構造の研究が重要である。また線グラフの連結度は基グラフの essential 辺連結度に置き換えられる。

ハミルトンサイクルは連結成分が1個の2因子なので、Thomassen の予想の解決に対して、2因子の連結成分数の上限の研究が重要である。本研究者は既に2005年にロ

ンドン大の Jackson 教授と共同研究を行い、最小次数4以上の2連結や3連結の claw-free グラフの2因子の連結成分数の上限を、偶グラフの研究を行うことによって示している。その証明の本質的な部分はペテルセンの定理「2辺連結3正則グラフは2因子を持つ」の一般化である。本研究では、この研究を進展させ、Thomassen の予想の解決、更に新しい予想や問題の発見を行い、その解決を行う。

2. 研究の進捗状況

積極的に海外の大学を訪問し共同研究を行い十分な成果を得ている。特にこれまで知られていない興味深い予想が得られており、部分的にそれらは解決されている。

具体的には、2006年度にイギリス・ダーラム大の Broersma 教授を訪問、共同研究を来ない、2007年度にはアメリカ・メンフィス大学の Faudree 教授を訪問、2008年度はチェコ・西ボヘミア大学の Ryjacek 教授を訪問して共同研究を行った。

Broersma 教授との共同研究では、以下の本研究者の予想を示すことに成功した。即ち「任意の Claw-free グラフ G に対して、その最小次数を δ (≥ 4) とすると、 G は成分数が $(n-1)/(\delta-1)$ 以下の2因子が存在する」。この結果は、既に国際専門誌「Graphs and Combin.」に掲載されることが決定している。

Faudree 教授との共同研究では、最小次数及び独立数や独立点集合が定める Claw-free グラフや線グラフの構造についての興味深い予想が幾つか発見され、それらに対する部分的解決に成功している。現在それらを論文にまとめている。

Ryjacek 教授との共同研究は、中国・北京理工大及び西ボヘミア大で行われた。この共同研究によって、Ryjacek 教授によって発見された有名な Ryjacek 閉包を含む新しい閉包を発見に成功し、その閉包によっても Claw-free グラフの問題が線グラフの問題に置き換えることが可能であることが示されている。この結果の応用によって、既に知られている定理の幾つかが本研究によって得られた結果の直接、系として得られる、または煩雑な証明の簡便化が可能であることが解っている。

また Ryjacek 教授との共同研究では、Faudree 教授らとの研究で得られた予想に対する新しい極値グラフを幾つか得ている。現在、得られた極値グラフの構造の解明及び一般化を試みている。

3. 現在までの達成度

当初の計画以上に進展している。

すでに研究の進捗状況で示したとおり、一般の claw-free グラフの 2 因子の連結成分数の上限はほぼ最良の形で本研究者らによる研究によって示されている。さらに新しい興味深い予想や問題を多く発見されており、その幾つかは既に部分的に解決されている。

4. 今後の研究の推進方策

本研究最終年度の今年は、これまで 3 年間の研究の集大成を行う。特に、線グラフや claw-free グラフの研究の第一人者である Ryjacek 教授が所属するチェコ・西ボヘミア大から 3 人の研究者を招へいし、共同研究を行う。さらに中国からも claw-free グラフや偶グラフについて著名な研究を行っている研究者を 2 名招へいする予定である。

特に、5 月には 1 ヶ月の予定で Kuzel 博士が滞在する予定である。Kuzel 博士は $\text{claw}(K_{1,3})$ を $K_{1,r}$ に一般化した場合の Ryjacek 閉包の研究について秀でた結果を発表されており、本研究で得られた結果や手法を同様に $K_{1,r}$ に一般化できるか共同研究を行う予定である。

また 1 月に来日予定の Kaiser 博士は 6 連結 claw-free グラフのハミルトン性に対してハイパーグラフを利用した斬新な証明方法を発見している。本研究者の 2 因子に対する手法と彼の方法を調合させ、これまでの本研究で得られた結果や予想、問題の解決や一般化を行う。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

①B. Jackson and K. Yoshimoto, Spanning

Even Subgraphs of 3-edge-connected Graphs, J. Graph Theory, to appear, 査読有り

② K. Yoshimoto, Edge degrees and dominating cycles, Discrete Math. 308 (2008), 2594-2599, 査読有り

③D. Paulusma and K. Yoshimoto, Relative length of longest paths and longest cycles in a triangle-free graph, Discrete Math. 308, 1222-1229 (2007), 査読有り

④ K. Yoshimoto, On the number of components in 2-factors of claw-free graphs, Discrete Math. 307 (2007), 2808-2819, 査読有り

⑤B. Jackson and K. Yoshimoto, Even subgraphs of bridgeless graphs and 2-factors of line graphs, Discrete Math. 307, 2775-2785 (2007), 査読有り

⑥J. Fujisawa, L. Xiong, K. Yoshimoto and S. Zhang, The upper bound of the number of cycles in a 2-factor of a line graph, J. Graph Theory 55, 72-82 (2007), 査読有り

[学会発表] (計 12 件)

①善本 潔, On 2-factors of claw-free graphs, 5th Workshop on the Matthews-Sumner Conjecture and Related Problems (Domazlice, Czech, 2008/October) 招待講演

②善本 潔, (S_1, \dots, S_l) -ordered cycles and crowded paths, Extremal Combinatorics Workshop (Renyi Institute, Budapest, Hungary, 2007/June)

③善本 潔, On the number of components in 2-factors of claw-free graphs III, 38th Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Florida Atlantic Univ. Florida, USA, 2007/March)

④善本 潔, On Claw-free graphs and Cubic graphs, 日本数学会 (東工大 2008年 8 月) 特別講演

⑤善本 潔, 2 因子とハミルトンサイクルについて, 第 4 回組合せ論若手研究集会 (慶應大 2008年 2 月) 招待講演

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]