

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2009

課題番号：18540144

研究課題名（和文） 反応拡散モデルにもとづく侵入と伝播の数理的研究

研究課題名（英文） Mathematical studies for the reaction-diffusion models of the biological invasion and propagation phenomena

研究代表者

細野 雄三 (HOSONO YUZO)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：50008877

研究成果の概要（和文）：本研究の主要な成果は、(1) 空間への拡散を考慮した感染症モデルに対して、感染症の伝播速度が、拡散係数と感染のメカニズムを規定するパラメータにどのように依存するかを明らかにし、伝播速度の解析的な評価を得たこと、(2) ランダムに空間に拡散する捕食者と餌食の2種モデルにおいて、餌食がいる所に捕食者が侵入した場合、侵入速度と捕食者と餌食の空間的な分布の形状について、これまで知られていない新しい特徴を明らかにしたことである。

研究成果の概要（英文）：The major result obtained in this research consists of two ingredients: (1) for the reaction-diffusion model of the infectious diseases, we analyze how the propagation speed of the infectious diseases depends on the parameters appearing in the model system and give the analytical estimate on the speed, (2) for the reaction-diffusion predator-prey model, we show the new features of the profile and the speed of the waves of the predator invading into the region occupied by the prey.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,000,000	0	1,000,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総計	3,300,000	690,000	3,990,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：応用数学、数理生物学、数理モデル、反応拡散系、進行波解

1. 研究開始当初の背景

(1) 生物多様性に深刻な影響を与える外来種の侵入や西ナイルウイルスや SARS などの感染症の伝播をはじめとする侵入と伝播の問題は、きわめて今日的な問題であり数理モデルに基づいた研究が必要とされていること

が本研究の物理的背景となっている。

(2) 本研究の出発点となる2種反応拡散モデルに対して不安定領域への侵入の問題に関して、多くの未解決問題が残されている。特に、開放空間への同時侵入問題に対して、

① 競争系においては、単調でない進行波の存在と安定性に関して、我々は様々な数値計算結果を得ている。しかし、その数学解析についてはまだ手がつけられておらず、理論的な解明を行うことは、数学的に興味あるだけでなく、数理生物学的な理解を深めるという意味でも重要である。

② Lotka-Volterra型の餌食と捕食者系に対する進行波解の存在とその速度の評価の問題に関して、餌食が拡散しない場合には S. Dunber により解決されているが、餌食が拡散する場合は基本的な問題であるにもかかわらず未解決である。

(3) 3種以上の反応拡散系については、ここ数年興味ある研究が現れはじめており、我々も Lotka-Volterra 型 3種競争系において数値シミュレーションによりカオスの挙動を初めとする興味ある結果を得ている。

2. 研究の目的

(1) 反応拡散モデルにもとづいて、侵入と伝播の様相を解析的、数値的に考察する。すなわち、①伝播速度の決定機構を、モデルの有する非線形性から解析的に解明し、進行波解をはじめとする侵入と伝播の様相を記述する解を規定する非線形構造を明らかにする。②数値シミュレーションにより侵入と伝播過程のダイナミクスを明らかにする。

(2) 以上の研究で得られた成果に基づいて、①空間的非一様性と時間的変動の要因を取り入れたモデル、および、②3種競争系をはじめとする多種系モデルでの侵入と伝播過程の解明を目指す。

(3) 本研究で得られた数学的な結果に基づいて、何が生物学的に重要な要素であるのかを議論し侵入と伝播の現象の理解を深める。

3. 研究の方法

(1) 反応拡散系の解析の一つの有力な方法は解析的特異摂動法である。この方法により進行波解の存在と形状を解析し、問題に現れるパラメータへの依存性を明らかにする。

(2) 伝播過程を記述する進行波解の存在問題は力学系の2つの平衡点を結ぶ軌道を求めることであり、したがって、幾何学的特異摂動法および力学系の手法が問題解決に有効で主要な方法の一つである。

(3) 侵入と伝播の過程のダイナミクスを

理解するためには、数値シミュレーションによるモデル方程式の持つ諸性質の解明は不可欠である。さらに、数値シミュレーションでは数学解析では捉えることのできない結果が得られ、解析を進める上でも大いに助けとなる。

4. 研究成果

(1) 高次自己触媒反応拡散系にたいして、自己触媒と反応物がともに空間的に拡散する場合について、進行波解の存在と速度が拡散係数と自己触媒反応の次数にたいしてどのように依存するかを数値計算と相空間解析によりにより明らかにした(京都大学数理解析研究所講究録 1498)。そこで得られた解析的な結果は、X. Chen and Y. Qi (2007) および S. Ai and W. Huang (2007) の結果より精密な結果を与えている。このことは、未知関数の非線形変換により特異性を消去することにより可能となり、その意味で我々の手法の方が優れているといえる。また、X. Chen and Y. Qi (2007) での未解決部分についても我々は一つの解答を与えている。

(2) 感染症の空間的な伝播を記述する決定論的モデルのひとつのクラスである反応拡散モデルについて、

①積分方程式モデルとの関係を議論し、感染症の空間伝播モデルの中での反応拡散モデルの位置づけを検討した。とくに、伝播速度の評価を得るために広く用いられる線形予測 (Linear conjecture) について密度依存非線形感染率モデルを考察し、進行波解の解析を通して感染症の伝播速度が、系に表れるパラメータにどのように依存するかを明らかにした(京都大学数理解析研究所講究録 1499、京都産業大学論集 36号)。そこで得られた数理生物学的に重要な結論は、「感染率が一定のときは感染症の伝播速度は未感染者の拡散係数に依存しないが、感染率が感染者の密度に依存するときには伝播速度は未感染者の拡散係数に依存することがある」という結果が得られたことである。さらに、感染症モデルにおいて重要な役割を果たす感染率についてどのような関数形が理論生物学モデルで現れるかの検討を行い、それら種々の感染率にたいして感染症の伝播現象の研究を行っている。

②感染者が免疫を獲得しないか除去されない場合に、進行波解の存在と伝播速度の問題を解析的に考察した。非線形感染率が Michaelis-Menten 型、高次多項式型の場合を含めて、その関数形がどのように伝播速度に影響を与えるか、感染者と未感染者の拡散係数が等しいときと、未感染者が拡散しない2つの特別な場合に伝播速度の評価を得た。こ

れら2つの場合には、相平面解析が適用できてかかなり一般的な非線形感染率に対して議論が可能であった。特にMichaelis-Menten型では伝播速度に関する線形予測が成り立つことが証明された。さらに、より一般の拡散係数の場合については3次元相空間解析が必要となりまだ現在引き続き研究中である。

(3) 感染症伝播を記述する拡散を伴うKermack-McKendrickタイプのSIRモデルにおいて、空間次元が2次元の場合に発展方程式による感染症の伝播の様相のシミュレーションを行い新しい知見を得た。特に、未感染者が空間的に非一様に存在する初期状態に感染者が侵入したとき、感染症の伝播の様子は初期条件に大きく依存し、感染症伝播の波が複数現れるという興味ある数値実験結果が得られた(「数理解析」No. 535, 2008)。報告者達の以前の研究により、SIR常微分方程式モデルにおける閾値定理に現れる閾値が同時に進行波解の存在条件を与えることを証明しているが、我々の数値実験結果においても、その閾値が2次元空間での感染症の伝播状況を本質的に規定していることが明らかとなった。さらに、空間2次元の場合のさらなるシミュレーションによるモデル方程式の性質の解明と、これらの非一様初期条件下の感染症伝播波の解析は1次元の場合も含めて今後の課題である。

(4) Lotka-Volterra型の捕食者と餌食モデルに対して、餌食が存在しているところに捕食者が侵入した場合に発生する追跡侵入進行波解について、李聖林、村田宙俊の両名との共同研究を行った。

①まず、李聖林の得た追跡侵入速度の数値計算結果を検討し、解析的考察とは矛盾することを研究代表者が指摘し、その原因を究明するため新たな数値計算を行い検討した。しかし、その合理的な理解はまだ出来ておらず、現在も研究を続行している。

②追跡侵入問題の初期値問題の数値計算から、捕食者のダイナミクスにおいて種内競争がない場合には、餌食の拡散係数を固定し捕食者の拡散係数を0に近づけたとき解の最大値ノルムが大きくなり有界でなくなること示唆する結果を得た。この結果は、Lotka-Volterra型の捕食者と餌食モデルの興味ある性質の新たな発見であり、これらの性質を明らかにすることは、捕食者と餌食モデルを理解する上で非常に重要な問題である。

③その問題を解決するために、捕食者に種内競争効果を導入し特異摂動法を用いて考察した。その結果、捕食者の種内係数を0とする極限をとることにより上記の数値計算結果が理解できることが分かった。この結果に

より、2種の基本モデルであるLotka-Volterra型の捕食者と餌食モデルの持つ特質の一つを明らかにすることが出来た。しかし、その解析には形式的な部分があり、数学的に厳密な議論は今後の研究課題である。以上の結果は、その他の数学的未解決問題も含めて京都大学数理解析研究所考究録1663(p. 65-71)にまとめた。

④捕食者の拡散係数が0の場合には、最小速度は0となり任意の正の速度の進行波の存在が期待される。この場合は、進行波解の方程式は3次元力学系の不安定平衡点と安定平衡点を結ぶ軌道を求めることになり、シューティング法により数値的に求めることが可能であると考えられる。現在、そのプログラムを作成し、数値シミュレーションを行っている。まだ有効な結果は得られていないが、今後の成果は先に述べた①~③で述べた問題の数学解析にも助けになると期待される。

(5) Lotka-Volterra型の捕食者と餌食モデルに対して、開放空間への捕食者と餌食の同時侵入進行波解については、餌食の拡散係数が小さいとき特異摂動法により、解の存在とその速度について議論できることを示した。しかし、この場合にも、(4)①で述べた解析結果と矛盾する数値計算結果を得ており、数値シミュレーションの信頼性に影響する深刻な結果である。本研究の中で明らかになったこの結果に対して、数学的な理解を与えることは、応用数学の観点から我々課せられた今後の重要な課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計17件)

(1) 細野雄三, 侵入問題に現れる進行波解について, 京都大学数理解析研究所講究録1663, (2009), 65-71 (査読無).

(2) Y. Tsujii, Quantile hedging and minimizing the expected shortfall for bond options, 京都産業大学論集, 自然科学系列, 第38号, (2009), 17-27 (査読有).

(3) T. Mori, Y. Tsujii, M. Yasugi, Integral of Fine computable functions and Walsh Fourier series, Electronic Notes of Theoretical Computer Science, Vol. 202, (2008) 279-293 (査読有).

(4) Y. Hosono, The propagation speeds of traveling fronts for higher order autocatalytic reaction-diffusion systems, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol. 24, No. 1 (2007), 79-104 (査読有).

(5) 細野雄三, 感染症の伝播を記述する決定

論的モデルによる空間的な伝播速度の評価, 京都産業大学論集, 自然科学系列, 第36号, (2007), 1-19 (査読有).

(6) Y. Hosono, Phase plane analysis of travelling waves for higher order autocatalytic reaction-diffusion systems, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, Vol. 8, No. 1, July (2007), 115-125 (査読有).

(7) M. Yasugi, T. Mori, Y. Tsujii, The effective sequence of uniformities and its limit: as a methodology in computer analysis, Annals of the Japan Association for Philosophy of Science, Vol. 15, (2007), 99-121 (査読有).

(8) 細野雄三, 伝染病伝播の反応拡散モデルにたいする進行波解, 京都大学数理解析研究所講究録 1499, (2006), 7-23 (査読無).

(9) Y. Hosono, Traveling fronts for higher order autocatalytic reaction-diffusion systems, 京都大学数理解析研究所講究録 1498, (2006), 26-35 (査読無).

(10) M. Yasugi, Y. Tsujii, T. Mori, Sequential computability of a function—Effective Fine space and limiting recursion—, Journal of Universal Computer Science, Vol. 11, (2006), 2179-2191 (査読有).

[学会発表] (計5件)

(1) 細野雄三, 李聖林, 村田宙俊, 侵入過程に現れる進行波解について, 研究集会「第5回生物数学の理論とその応用」(日本数理生物学会後援), 2009年1月14日, 京都大学数理解析研究所.

(2) 細野雄三, 侵入問題と進行波解, 第18回日本数理生物学会大会, 2008年9月18日, 同志社大学.

(3) Y. Hosono, Traveling fronts for the reaction-diffusion epidemic models with nonlinear incidence, The Second China-Japan Colloquium of Mathematical Biology, August 6, 2008, Okayama University.

[図書] (計1件)

(1) 稲葉寿編著, 培風館, 感染症の数理モデル (第5章「感染症の空間的な伝播を記述する数理モデル」, 161-189), 2008年.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

細野 雄三 (HOSONO YUZO)
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号: 50008877

(2) 研究分担者

辻井 芳樹 (TSUJII YOSHIKI)
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号: 90065871

(3) 連携研究者

()

研究者番号: