様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年　6　月　4 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006 年度から 2008 年度
課題番号：18540145
研究課題名（和文）　様々な組み合わせ問題におけるグレブナー基底の有効性の検証

研究課題名（英文）　Verification of the efficiency of the Gröbner Basis for Various Combinatorial Problems

研究代表者 渡邊　芳英
同志社大学・理工学部・教授
研究者番号　50127742

研究成果の概要：
1）最尤復号の問題に付随する格子イデアルについて調べ，符号が完全符号のときは，復号に必要なイデアルの次数順序に関するグレブナー基底が，最小重みの符号語だけで完全に決まることを示した．
2）最大流問題を整数計画問題として定式化し，最大流問題に付随する整数計画問題の係数行列は縮小接続行列のローレンス持ち上げとして得られることから，最大流問題に付随するトーリックイデアルの普遍グレブナー基底が，有向グラフにおい辺の向きを無視した閉路に対応する２項式と辺の向きを無視した始点から終点への路に対応する２項式全体の和集合からなることを示した．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
平成 18 年度	900,000	0	900,000
平成 19 年度	600,000	180,000	780,000
平成 20 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,100,000	360,000	2,460,000

研究分野：最適化問題，組み合わせ論。
科研費の分科・細目：数学・数学一般
キーワード：グレブナー基底，トーリックイデアル，格子イデアル，最尤復号，ネットワーク，最大流問題，Conti-Traverso のアルゴリズム

１．研究開始当初の背景

多項式環のイデアルのグレブナー基底は，可換環論や代数幾何学において，様々なアルゴリズムを提供するきわめて有用な道具であり，近年ではその有用性から標準的な代数学の教育コースに含まれることも多くなった．グレブナー基底の有用性は実はそのような伝統的な数学への応用に留まらない．そのようなものの代表例は Conti と Traverso により開発された整数計画問題を解くためのアルゴリズムである．組み合わせ論的な問題の多くは，整数制約条件によって定められる配置を数え上げたり，条件をみたす配置の内である目的のために最適なものを選び出す問題として定式化できるので，整数計画問題を解くアルゴリズムは極めて広範な組み合わせ的な問題に応用が可能となる．本研究を開始当初は，まず研究代表者の共同研究者である池上大介氏と共同で池上と楫によって開発されたグレブナー基底を用いて２元線形符

号の最尤復号を行うアルゴリズムについて，具体例を用いてその有効性を検証しようとする試みたことが，この研究を始めるきっかけであった．

２．研究の目的

本研究の目的はグレブナー基底を用いて様々な組み合わせ最適化問題について研究し，この方法の組み合わせ最適化問題に対する有効性を検証することがこの研究の目的である．取り上げた具体的な組み合わせ最適化問題としては，本研究のきっかけとなった 2 元線形符号の最尤復号の問題（池上・楫アルゴリズム）と，ネットワーク最適化問題の代表例である最大流問題である．この二つの組み合わせ最適化問題について，Asir や Singular などグレブナー基底計算に特化した計算代数システムを使うことにより多くの例を計算し，そのような例の計算を通じてグレブナー基底を用いた方法の利点と限界を明らかにすることが本研究の目的であった．

３．研究の方法

この研究を始める前に，池上・楫のアルゴリズムを用いて 2 元線形符号の最尤復号を行うために必要となる格子イデアルのグレブナー基底を修士論文の一環として院生に計算してもらった．計算したのは比較的符号長の短い BCH 符号である．その計算によってわかったことは，このアルゴリズムを適用する際にもっともネックになるのはグレブナー基底の計算量だということである．一方で，グレブナー基底が計算されれば復号の計算(簡約化の計算)はそれほど大きくはないこともわかった．最尤復号に用いるグレブナー基底の計算量が膨大になり，また当然ながらそのグレブナー基底が非常に大きなものになるという問題はかなり深刻であり，符号長が 16 や 32 といった実用上使うにはあまりに小さい符号長をもつ BCH 符号に対しても，その計算時間は 20 時間を超えることもあり，グレブナー基底に含まれる多項式の数は数万個にもなった．ここに及んで，我々は，このような復号法の効率を考えることをあきらめ，復号に使われるグレブナー基底が，考えている符号にとってどのような数学的な意味を持つのか考えるという方向へ研究を向けることとし，そのことによりいくつかの興味ある成果を得ることができた．

　ネットワーク最適化問題としての最大流問題を，整数計画問題として定式化し，その問題を Conti-Traverso のアルゴリズムに従って考える際においても，われわれの研究の方向性は，最尤復号の場合と全く同じであった．実際，最大流問題を整数計画問題として定式化すると，非常に小さいサイズの玩具問題でも，その問題に付随するトーリックイデアルは大きな数の変数をもち，そのグレブナー基底は非常に大きなサイズとなり，高速で大きなメモリーをもつ計算機を使い，グレブナー基底の高速計算を開発の大きな目的とし開発された計算代数システムである Asir や Singular をもってしても，その計算は非常に困難であることがわかる．従って，このような問題においても，研究の方向性としてはトーリックイデアルのグレブナー基底が最大流問題を定義するネットワークにおいてどのような意味をもつのかということを調べることとした．そのためには，グレブナー基底の全体が見渡せる程度のサイズの小さい問題について，トーリックイデアルのグレブナー基底を計算し，それを眺めて，それがネットワークとどのようにかかわっているかを考えるという方法をとった．その結果いくつかの興味ある成果を得ることができた．

４．研究成果

研究は大きく分けて 3 つの分野にまたがるので，その成果も 3 つに分けて述べる．

1）グレブナー基底を用いた 2 元ブロック線形符号の最尤復号アルゴリズム（池上・楫アルゴリズム）の研究：

様々なパラメータをもつ 2 元 BCH 符号に対して，付随する格子イデアルのグレブナー基底を計算代数システム Asir と Singular を用いて具体的に計算した．その結果，現在のコンピュータで計算できるのは符号長 63 程度であることがわかった．この符号長は実際に使われている BCH 符号の符号長である 255 または 511 に比べるとかなり小さく，グレブナー基底の計算が 63 程度の符号長で破綻するということから，このようなアルゴリズムを実際のシステムに実装することは非常に難しいことが明らかとなった．しかし，このような計算の過程で，情報長が最も短い BCH 符号（実は Hamming 符号で最小重みが 3 となる）に対しては，その符号に付随する格子イデアルの次数順序に関するグレブナー基底が，最小重みの符号語により表すことができることが観察された．この事実は完全符号に関する予想として定式化されて，その予想に対して証明を与えることができた．この結果は，線形符号に付随する格子イデアルのグレブナー基底が，線形符号の組み合わせ論的な性質を表していることを示唆しており，このような結果が他のパラメータを持つ BCH 符号についても得られれば，数学的にも興味深いだけではなく，実用上も意味ある結果となると思われる．さらに，一般の線形符号について，付随するイデアルの辞書式順序に関するグレブナー基底が非常に簡単な形になることを示すこともできた．この結

果を得るにあたっては大学院生吉武純子の貢献が大きい．残念ながら，辞書式順序のグレブナー基底は，直接的には最尤復号には役立たないが，考えているイデアルは０次元であるので，いわゆる FGLM のグレブナー基底変換アルゴリズムが適用できて，辞書式順序のグレブナー基底から次数順序のグレブナー基底を求めることができる．この方向での研究についてはまだ全く手がついていないが将来の課題としては重要であると考えている．

2) トーリックイデアルのグレブナー基底を用いた最大流問題の解析：

まず，グラフ上のネットワーク最適化問題の代表例である最大流問題を標準形の整数計画問題として定式化した．この定式化にあたってはネットワークを定義するグラフの接続行列から視点と終点に対応する行を除いた行列が重要な役割を果たすことがわかった．そのような行列をここでは縮小接続行列と呼ぶことにする（この銘々は大学院生宮城奈津子による）．最大流問題を整数計画問題として定式化した際の係数行列は，縮小接続行列のローレンスリフトであることがわかった．そこでまず，まず我々は縮小接続行列で定義されるとーリックイデアルについて研究することとした．まず，そのようなトーリックイデアルの生成元を求めることになるが，そのためには縮小接続行列の整数核の生成元を求めることが必要であった．我々はまずそのような整数核の生成元が，グラフの始点から終点に至る路に対応する接続ベクトルからなることを示した． さらに，Sturmfels らの結果を用いると，縮小接続行列に付随するトーリックイデアルの生成系は，始点から終点に至る路に対応する接続ベクトルから作られる２項式だけからなり，飽和商を求める必要がないこともわかった．以上の結果は共同研究者池上大介と大学院生宮城奈津子の協力によって得られ，北海道大学で行われた 2007 年度応用数理学会年会で発表された．発表者宮城奈津子は若手講演者賞を受賞している．残された問題は最大流問題に付随するトーリックイデアルの生成元またはグレブナー基底をネットワークの言葉で特徴づけることであった．すでに述べたように，最大流問題の係数行列は縮小接続行列のローレンスリフトであり，さらに，縮小接続行列は全ユニモジュラー行列であるから，良く知られている一般論からそのようなトーリックイデアルの極小生成元が，普遍グレブナー基底になることがわかる．従って残る問題は一つの極小生成元を求めることになるが，それについては，いくつかの例の計算によって，そのような極小生成元（ある単項式順序に関する被約グレブナー基底）が，グラフの向き付けを無視した場合の，閉路に対応する２項式全体と，始点から終点に至る路に対応する２項式全体の和集合に一致することが予想された．この興味ある予想は池上大介と大学院生渡辺扇之介の協力により，マトロイド的議論を経て完全に証明され，東京大学柏キャンパスで開かれた 2008 年度応用数理学科年会で発表された．

3) 整数計画法を用いた RNA 結合 2 次構造予測:

シュードノットなしの RNA 結合２次構造予測の問題は，２次構造を構成する塩基対の水素結合のエネルギーの総和を最小化する組み合わせ最適化問題と考えられ，ダイナミカルプログラミング等の手法を用いて解くことができる．我々は，京都大学情報学研究科の加藤有己の協力を得て，このような結合 2 次構造予測の問題を整数計画問題として定式化し，この整数計画問題を最近著しく開発が進んでいる商用の最適化ソルバーを用いて解くことを試みた．用いたソルバーはアイログ社製の CPLEX である．とくべき整数計画問題はかなり大きなものとなり。実際に解ける問題のサイズには限界があることもわかったが，一定程度の有効性は検証できた．このような方法の利点として，問題の条件の変更などに柔軟に対応できることがあることを考えると，我々の方法はそれなりに有効であることがたしかめられたといってよいと思う．実際は，この研究成果は，本研究の目的とは直接関係はないが，この問題は整数計画として定式化される興味ある組み合わせ最適化問題の例となっており，グレブナー基底を用いる方法が使えることになる．しかし，その場合計算量は非常に大きくなることが予想されるので実用性は疑わしい，しかし本研究のようなアプローチにより問題の構造が見えてくる可能性もあると考えられる．このような研究の方向性は次の課題として重要であると思われる．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① 近藤弘一，杉本昌平，岩崎雅史「非線形方程式の解法による行列の特異値分解アルゴリズム」，日本応用数理学会論文誌 19 巻pp81-103（2009)，査読あり

② 近藤弘一，笹田昇平、小幡雅彦，岩崎雅史，中村佳正　「Kakarala-Ogunbona の画像分解における特異値の近接度を低減するアルゴリズム」，情報処理学会論文誌，コンピューティンシステム 48 巻ACS 18，pp216－225（2007)，査読あり

③ Yuki KATO, Keitaro ICHIHARA and Yoshihide WATANABE "RNA-RNA Interaction Based on Integer Programming" Proc. 18th Symposium on Genome Informatics 2007, Poster Book、pp70－71 (2007), 査読あり
④ 渡邊芳英, 吉武純子, 池上大介 「2 元線形符号の最尤復号におけるグレブナー基底
を用いた方法－BCH 符号への応用－」, 同志社大学理工研報告, 48 巻(3 号), pp35－42(2007), 査読なし
⑤ 渡邊芳英 「整数計画問題と 2 元線形符号の最尤復号」城西大学大学院理学研究科業績集(数学専攻)9 巻, pp46－53(2006) 査読なし
⑥ Yoshihide WATANABE "Application of Gröbner Basis Technique to Maximum Likelihood Decoding of Linear Block Codes", Proceeding of The 5th Joint Symposium between Doshisha University and Chonnam National University, pp143-146(2006) 査読なし

〔学会発表〕(計 5 件)
① 渡辺扇之介, 池上大介, 渡邊芳英
「最大流問題における双対性」, 日本応用数理学会年会, 東京大学柏キャンパス, 2008 年 9 月
② 市原慶太郎, 加藤有己, 渡邊芳英
「整数計画法に基づく RNA 間相互作用予測」情報処理学会 MPS/BIO 合同研究会, 産業総合技術研究所（お台場), 2007 年 12 月
③ 宮城奈津子, 渡邊芳英, 池上大介
「最大流問題に付随するトーリックイデアルの生成系」, 日本応用数理学会年会, 北海道大学, 2007 年 9 月
④ 宮城奈津子, 渡邊芳英, 池上大介
「トーリックイデアルのグレブナー基底と最大流問題」、日本応用数理学会年会, 筑波大学, 2006 年 9 月
⑤ 吉武純子, 渡邊芳英, 池上大介
「グレブナー基底を用いた最尤復号法」
日本応用数理学会, 筑波大学, 2006 年 9 月

６．研究組織
(1)研究代表者
渡邊　芳英（WATANABE YOSHIHIDE)
同志社大学・理工学部・教授
研究者番号　50127742
(2)研究分担者
近藤　弘一 (KONDO KOICHI)
同志社大学・理工学部・准教授
研究者番号　30314397
(3)連携研究者
該当なし