様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　３月１０日現在

研究種目：　基盤研究（Ｃ）
研究期間：　２００６～２００８
課題番号：　１８５４０１５０
研究課題名（和文）　逆問題の解の直接的再構成法の数値解析と高精度化に関する研究
研究課題名（英文）　A Study on the High-Accuracy Numerical Reconstruction Methods for the Solution of Some Inverse Problems for Partial Differential Equations.

研究代表者
大江　貴司　(OHE TAKASHI)
岡山理科大学・理学部・准教授
研究者番号：９０２５８２１０

研究成果の概要：
Laplace 方程式や Helmholtz 方程式などの偏微分方程式の逆問題について、その解の直接的・数値的再構成法の開発を行い、数値実験による有効性の検証を行なった。特に（１）囲い込み法に基づく方法、（２）代用電荷法に基づく方法、（３）重みつき境界積分に基づく方法について開発を行なった。いくつかの解法については安定性解析や正則化手法に関する理論解析を行ない、有効性に関する理論的保証を与えた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	1,300,000	0	1,300,000
２００７年度	800,000	240,000	1,040,000
２００８年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	570,000	3,770,000

研究分野：　応用数学・数値解析・数理工学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：逆問題，数値解析，数値解法，応用数学，数理工学，画像処理,医用工学

１．研究開始当初の背景

偏微分方程式の逆問題は、部材内の亀裂の推定･環境における汚染源の推定･脳波や脳磁図を用いた脳活動の推定など、工学や医学における数多くの問題の数学モデルとして現われ、その研究は重要なものとなっている。従来、これらの問題の数学的研究は、主として問題の解の一意性や安定性に関するものが行われてきたが、近年になって問題の具体的な解の再構成公式、それを実現する数値解法および収束性･誤差などの数値解析に関する研究が重要になっている。

逆問題の解の再構成法に関する数値解析的研究は、1990 年以降コンピュータの発展に伴い活発になっており、数多くの論文が発表されている。しかし、これらの研究の多くで利用されている手法は、観測値から逆問題の解を直接的に再構成するのではなく、偏微分方程式の数値解と観測値の差を評価することで再構成するという方法であり、間接的解法というべきものであった。そのため

(ｱ)　有限差分法・有限要素法はいずれも領域のメッシュ分割の分点の個数に対し、精度は高々代数オーダである。したがっ

て、得られる数値解の誤差を小さくするためには分点の個数をかなり大きくする必要がある。ところが逆問題の多くは非適切問題であるため、分点の個数が大きくなるとともに数値解の安定性が失われるというジレンマが発生する。

(ｲ) 数学的に解の一意性が保証されているような逆問題であっても、数値的に得られた解が真の解、あるいはそれに近いものであることを保障・検証することが困難である。また、数値解の誤差評価が難しい。

(ｳ) 非適切性に起因する不安定性の対策として Tikhonov の正則化法が多くの場合に使用されている。しかし、正則化項の構成、および計測誤差に対する正則化パラメータの設定などについて基準を与えることが困難である。

(ｴ) 逆問題の解を表現するパラメータの値の適当な初期設定が困難である。またこの値の設定が適切でない場合、いわゆる局所最適値に収束してしまい、真の解に近いものが得られない。

という問題点が指摘されていた。これらの問題点の根本的な原因は、観測値から直接的に再構成する方法ではなく、偏微分方程式の解を介した間接的な方法にあると考えることができる。したがって、観測値から直接的に逆問題の解を再構成する手法とそれに基づく数値解法の開発を進めることが必要となっていた。

２．研究の目的

本研究課題では、１にあげた問題点の解決を目指し、観測値から直接的に逆問題の解を再構成する手法とそれに基づく数値解法の開発を行なった。ここでいう直接的な再構成手法とは、逆問題の解の表現するパラメータを、偏微分方程式を数値的に解くことなしに観測値から直接的に求める手続きを意味する。ここで提案する直接的な再構成手法の利点として次のことが挙げられる。

(1) 逆問題の解を表現するパラメータと観測値の関係が直接的に表現されることから、観測値の誤差の逆問題の解に対する影響の評価が可能となる。
(2) 逆問題の解の誤差のコントロールが可能となる。特に再構成手法内の計算過程に高次の数値計算法を適用することが可能となる。
(3) 非適切性により正則化が必要な場合についても、正則化項の設定・評価が間接的手法に比較して明確になることが期待できる。
(4) 数学的に解の一意性が与えうる場合、その一意性を損なうことなく数値解を得ることが可能となる。
(5) 間接的手法で必要であった逆問題の解を表現するパラメータの初期値設定の必要がなくなることが期待できる。
(6) 工学・医学的な問題に適用する際、観測点や計算アルゴリズムなど、機器の実装方法についての基準を与えることが可能となる。

先にあげた問題点のうち、(ｱ) に対しては(2)が、(ｲ) に対しては(1)・(4)が、(ｳ) に対しては(3)が、また (ｴ) に対しては(5)がそれぞれ対応する解決策として考えることができる。特に(2)については、再構成手法の計算過程に表れる関数やその積分等の近似に、各々の特性を吟味することで高精度化を図ることができると考えられる。なお(6)については、多くの逆問題が工学・医学的な問題への応用を持っており、きわめて重要な観点であると考えられる。

以上の考察のもと、本研究課題では観測値から直接的に逆問題の解を再構成する手法とそれに基づく数値解法の開発を目的とした。同時に提案する数値解法について、その収束性、安定性の評価や誤差評価を与えることを目的とした。

３．研究の方法

逆問題の解の直接的再構成法として、本研究課題の研究組織では研究組織では

(A) 重み付き境界積分を用いた問題の代数方程式化
(B) 囲い込み法
(C) 代用電荷法

に基づく手法の研究を進めた。

(A) の手法は、特にソース逆問題において有効な方法であり、ソース項の重み付き体積積分がGreen の定理を用いることにより観測値および境界条件についての重み付き境界積分で表現できることを利用した方法である。本研究課題の研究組織ではこの手法に基づくPoisson方程式や拡散方程式、準静的Maxwell方程式のソース逆問題の数値解法をいくつか開発し、論文として発表している。

本研究課題では、この手法の
①Helmholtz方程式のソース逆問題
②波動方程式のソース逆問題
対する適用法の開発と誤差解析、および数値実験による有効性の検証を行なった。

(B)の手法は、本研究組織の連携研究者である池畠がLaplace方程式の逆問題のひとつである、均質媒質中の空洞の推定逆問題の解の再構成手法として開発したものである。この手法は純粋に数学解析的な手法であり、得られた再構成公式は無限大への極限操作を

含むなど、数値的実装面および数値解析面で課題を残していた。しかし、池畠と研究代表者の大江により、無限大への極限操作の数値的な評価など問題点の解決手段を開発し、手法の数値的実装に成功した。池畠はその後も境界積分に基づく囲い込み法について研究を進めており、
①不均質媒質中の空洞および亀裂推定逆問題に対する解の複素幾何光学解を用いた再構成公式
②Mittag-Leffler 関数を用いたより詳細な亀裂形状再構成公式
③Helmholtz方程式の散乱逆問題に対する解の再構成公式
を得ている。
しかし、これらについても無限大への極限操作を含むなど、数値的実装面および数値解析面で課題があり、これらの解決およびその有効性の検証を行なった。

(C)の手法は、特にLaplace方程式の境界値問題の高精度数値解法として知られたものであり、その特性を逆問題解析に利用しようというものである。本研究課題の研究組織ではLaplace方程式のCauchy問題に対する代用電荷法の適用に関する研究を行っており、２次元の円環領域に対する誤差評価および安定性評価に関する結果を得ているが、Cauchy条件の持つノイズや誤差に対する安定性、特に正則化手法として考えられる Tikhonovの正則化法や特異値分解法などを適用した場合の理論的評価などについて課題があり、これらの評価を行なった。また、より現実に即したCauchy条件の観測条件の下での数値解法の開発とその有効性評価についてもか行なった。

なお、偏微分方程式の逆問題に対する逆問題の数値解法は、画像処理や医用工学においても有効であることが知られている。これらの応用についても検証を行なった。

４．研究成果

本研究課題では、逆問題の解の直接的構成法とその数値的構成、およびその高精度化と画像処理への応用に関する研究を行なった。主な研究内容は以下の５つに分けられる。

① 囲い込み法を用いた逆問題の解法のの数値的実現
② Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する代用電荷法の適用とその正則化
③ 波動方程式および Helmholtz 方程式のソース逆問題に対する重みつき境界積分を用いた数値解法の開発
④ 準静的 Maxwell 方程式のソース逆問題に対する電場・磁場双方に対する指標関数を用いた解法の開発
⑤ 逆問題の数値解法の画像処理への応用

以下、この５つの各々の内容について、詳細に述べる。

(1) 囲い込み法を用いた逆問題の解法の理論的発展と、その数値的実現

囲い込み法は、本研究課題の連携研究者（2006・2007 年度は研究分担者）の池畠が Laplace 方程式の逆問題として記述される、媒質中の空洞の推定逆問題の解の再構成手法として開発したものである。しかし、池畠の提案した手法は純粋に数学解析的な手法であり、再構成公式は無限大への極限操作を含むなど、数値的実装面および数値解析面で解決するべき課題が残っていた。本研究課題では、

①Laplace 方程式の境界値逆問題に対する Mittag-Leffler 関数を用いた囲い込み法
②Helmholtz 方程式の境界値逆問題に対する囲い込み法

に関する成果を得た。

まず、①については、これまで開発してきていた、指数関数を基にした囲い込み法では不可能である、空洞や亀裂の凹部の推定が可能であることが理論的に期待されていたが、数値的にもこれを実証することができた。この結果は学会発表①、④および雑誌論文⑥で公表した。

次に、②については散乱波の(ア)境界における Cauchy データを利用した方法、および(イ)無限遠における挙動(far field patter と呼ばれる)を利用した方法について検討し、いずれについても数値的に実装が可能であり、また亀裂や空洞の推定についても見通しを得ることができた。この結果については、現在学会発表および論文作成準備中である。

(2) Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する代用電荷法の適用とその正則化

Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する代用電荷法の適用については、すでに数値解の一意性および真の解への収束性が本研究課題の研究組織によって明らかとなっていたが、Cauchy 条件がノイズを含んだ場合の安定性、特に正則化の手法と正則化解の誤差および安定性に関し、解決すべき課題が残っていた。本研究課題では特に

① Tikhonov の正則化法の適用とその正則化パラメータの設定に関する数値的研究
② Tikhonov の正則化法を適用した場合の数値解の誤差、および安定性に関する理論的研究
③ 特異値分解法を適用した場合の数値解の誤差、および安定性に関する理論的研究

に関する成果を得た。

まず①については、正則化パラメータに対

する数値解の誤差の挙動について数値実験的に検討を行ない、最適な正則化パラメータを得るうえで L-curve 法が有効であることを確認することができた。

次に②について、①で得られた結果を理論的に検証するため、正則化パラメータに対する数値解の誤差の挙動を理論的に検証した。その結果、誤差の挙動が正則化パラメータに対し L-curve 状の挙動をすることが理論的に確認でき、①の結果の保証をすることができた。

さらに③では、特異値分解法を基にした正則化法について、特に打ち切り次数と数値解の誤差の挙動について理論的に検討を行なった。その結果、打ち切り次数について、ある種の最適基準を考えることができることを見出すことができた。

以上の結果のうち、①については学会発表②、⑤および雑誌論文④において、また②、③については学会発表⑧で公表した。

(3) 波動方程式およびHelmholtz方程式のソース逆問題に対する重みつき境界積分を用いた数値解法の開発

波動方程式およびHelmholtz方程式のソース逆問題に関し、特にソース項が空間的に点状のものについて、重みつき協会積分を用いた数値解法に関する研究を段階的に行なった。その結果

① Helmholtz 方程式について、ソース項が複数の双極子状のソースからなる場合について、その位置と双極子モーメントを求める方法
② ソース項がただひとつの点状ソースからなる場合に、その位置、および強度の時間的変化を推定する方法。
③ ソース項が複数の点状ソースからなる場合に、おのおのの位置、および強度の時間的変化を推定する方法。

に関する成果を得た。

まず①については、観測値として、領域の境界全体におけるデータを用いることにより、複数の点状ソースの位置、双極子モーメンを推定することができることを、数値的に示した。

次に②については、観測値として、境界上のただ１点におけるデータを用いるのみにより、点状ソースの位置、および強度の時間的変化を推定することができることを、数値的に示した。

また③については、観測値として、領域の境界全体におけるデータを用いることにより、複数の点状ソースの位置、および強度の時間的変化を推定することができることを、理論的、また数値的に示した。

以上の結果のうち、①については学会発表③において、②については雑誌論文⑤、⑦において、③については学会発表⑥において公表した。

(4) 準静的Maxwell方程式のソース逆問題に対する電場・磁場双方に対する指標関数を用いた解法の開発

脳磁図と脳波を同時に利用した脳活動の推定法の数学モデルである準静的 Maxwell 方程式のソース逆問題に対し、これまで別々の扱いになっていた電場および磁場を組み合わせて用いた２つの指標関数を用いた数値解法を開発した。特にこの結果、従来、磁場のみによりソース項を推定した場合に問題となっていた一意性に関する問題点を解決できるという結果を得ることができた。結果については雑誌論文②において公表した。

(5) 逆問題の数値解法の画像処理への応用

逆問題的手法は画像処理、特に効率的な画像データ圧縮との関係が深く、この観点からの研究を行なった。その結果、

① 画像データ圧縮に対する Poisson 方程式の逆問題の解法の応用
② 多近傍情報による予測と残差直交変換の階層化を応用した画像圧縮法

に関する新しい成果を得た。

まず、①JPEG画像における画像圧縮などに用いられる離散コサイン変換に対し、Poisson方程式の逆問題の考え方を取り入れた圧縮法を提案した。

また②については、多近傍情報による予測と残差直交変換の階層化を応用した画像圧縮法を提案し、その効率と速度について実例により検討した。

なお、研究成果については、①については雑誌論文①において、②については学会発表⑦および雑誌論文③、⑧において公表した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）

① K. Yamatani, N. Saito, Improvement of DCT-based compression algorithms using Poisson's equation, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 15, 2006年, pp.3672-3689, 査読有.
② K. Yamatani, T. Ohe and K. Ohnaka, A direct identification method for current dipoles from electromagnetic fields, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 201, 2007年, pp. 164-174, 査読有
③ 芦澤恵太，山谷克，斎藤直樹，多近傍情報による予測と残差直交変換の階層化お

よびその画像圧縮への応用，日本応用数理学会論文誌，Vol.17，2007 年， pp. 239-257，査読有.

④ Takashi Ohe，Katsu Yamatani，Kohzaburo Ohnaka，On a numerical solution of the Cauchy problem for the Laplace equation by the fundamental solutions method, Proceedings on Applied Mathematics and Mechanics，Vol. 7，2007 年，pp. 2040035-2040036，査読有.

⑤ H. Inui and K. Ohnaka，A Direct Identification Method of a Point Source for 3-dimensional Scalar Wave Equation, Information，Vol. 11，2008 年，pp. 171-178，査読有.

⑥ M. Ikehata and T. Ohe，Enclosure method for an inverse crack problem and the Mittag-Leffler function，Inverse Problems, Vol. 24，015006 (27pp)，2008 年，査読有.

⑦ K. Ohnaka and H. Inui，On an Inverse Source Problem for 3-dimensional Wave Equation，Joint Research on Environmental Science and Technology for the Earth，Annual Report of FY 2007, M. Ike and P. H. Viet (eds.)，2008 年, pp. 544-547，査読有.

⑧ 芦澤恵太,山谷克，高階導関数に着目した段階的なDCT係数予測と画像圧縮への応用, 電子情報通信学会論文誌(A)，Vol.J91-A, 2008 年，pp.808-816，査読有.

〔学会発表〕(計８件)

① M. Ikehata and T. Ohe，Inverse crack problem and the Mittag-Leffler function, Inverse Problems in Applied Sciences --- towards the break through --- , 2006 年７月６日，北海道大学.

② 大江貴司，大中幸三郎，円弧上で与えられた Cauchy 条件に対する Laplace 方程式の数値解法について，日本応用数理学会 2006 年度年会，2006 年９月 16 日，筑波大学.

③ K. Ohnaka，A Numerical Method for Finding Current Sources for Time-Harmonic Maxwell's Equations，The Sixth East Asia PDE Conference，2006 年５月 16 日，Wuhan University，China.

④ T. Ohe and M. Ikehata，A numerical method for inverse crack problem using the Mittag-Leffler function，研究集会「数理科学セミナー」，2007 年２月 10 日，筑波大学.

⑤ T. Ohe，K. Yamatani and K. Ohnaka，On a numerical solution of the Cauchy problem for he Laplace equation by the fundamental solutions method，The 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics，2007 年７月 20 日，University of Zurich，Switzerland.

⑥ 乾裕一，大中幸三郎，変化する強度を持つ複数点波源に対する同定日本応用数理学会 2007 年度年会，2007 年９月 15 日，北海道大学

⑦ 芦澤恵太，山谷克，多近傍情報を用いたDCT係数予測,日本応用数理学会 2007 年度年会，北海道大学，2007 年９月 17 日.

⑧ 大江貴司，大中幸三郎，Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する代用電荷法の正則化について，日本応用数理学会環瀬戸内応用数理研究部会第 12 回シンポジウム，2008 年 10 月 12 日，山形大学理学部.

６．研究組織

(1)研究代表者

大江　貴司（OHE TAKASHI）
岡山理科大学・理学部・准教授
研究者番号：90258210

(2)研究分担者

(3)連携研究者

大中　幸三郎（OHNAKA KOHZABURO）
大阪大学大学院・工学研究科・准教授
研究者番号：60127199

池畠　優（IKEHATA MASARU）
群馬大学大学院・工学研究科・教授
研究者番号：90202910

山谷　克（YAMATANI KATSU）
名城大学・都市情報学部・准教授
研究者番号：80293611