様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　４月２６日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006～2009
課題番号：18540154
研究課題名（和文）　特殊領域の研究とその複素幾何学への応用

研究課題名（英文）　Study of special domains and its application to complex geometry

研究代表者
清水　悟（SHIMIZU　SATORU）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90178971

研究成果の概要（和文）：本研究においては、特殊領域の研究を通じて、一変数複素関数論における基本的重要結果であるリーマンの写像定理の高次元化を試みた。具体的には、特殊領域の一種であるラインハルト領域の研究を利用して、球の直積を、ある種の基本的な場合に、その正則自己同型群により内在的に特徴付けることに成功した。またこの研究に関連して、複素ユークリッド空間の正則自己同型群 G のある種の部分群の構造を組織的に調べる方法を確立し、G 自体の構造を解明するための手がかりを得た。

研究成果の概要（英文）：In the present research, through the study of special domains, we tried to give a higher-dimensional generalization of the Riemann mapping theorem that is a fundamental and important result in one complex variable. To be concrete, by making use the study of Reinhardt domains that are a kind of special domains, we succeeded in characterizing the direct product B of balls intrinsically by its holomorphic automorphism group when B is of some fundamental types. Also, related to this research, we established a systematic method of investigating the structure of a class of subgroups of the holomorphic automorphism group of the complex Euclidean space, and we obtained a lead to clarifying the structure of G itself.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,300,000	0	1,300,000
2007 年度	800,000	240,000	1,040,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	3,500,000	660,000	4,160,000

研究分野：多変数複素解析学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：関数論、特殊領域、ラインハルト領域、チューブ領域、複素幾何学、トーラス作用、リー群、正則ベクトル場

１．研究開始当初の背景

(1) 研究代表者は従来からリー群の理論を用いた多変数複素解析学、複素幾何学の研究を行っている。今回の研究課題「特殊領域の研究とその複素幾何学への応用」は、その一環として、研究代表者がこれまでに採択された科学研究費研究課題「複素多様体の上への群作用の研究」、「特殊領域の研究」、「多変数複素解析学における正則同値問題と関連諸問題へのリー群論的アプローチ」と次のように関連している。

(2) 「複素多様体の上への群作用の研究」においては、特にトーラス作用の研究に集中した。その結果、長年懸案の問題であった非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題の解決に、部分的ではあるが本質的な進展を見た。そしてこの解決結果より非有界なラインハルト領域の上へのトーラス作用の標準化についての基本的な結果を得た。これらの結果を基にして、非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題の一般的解決およびトーラス作用の共役性の複素幾何学への応用の準備を整えることができた。非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題の一般的解決は、「特殊領域の研究」、「多変数複素解析学における正則同値問題と関連諸問題へのリー群論的アプローチ」、そして今回の「特殊領域の研究とその複素幾何学への応用」を通じての主要なテーマの一つとなっている。またトーラス作用の共役性の複素幾何学への応用は、研究分担者の児玉教授との上記「特殊領域の研究」における研究連絡の際に着想を得た課題で、研究課題「多変数複素解析学における正則同値問題と関連諸問題へのリー群論的アプローチ」における複素ユークリッド空間Ｅと穴あき複素平面の直積空間Ｔとの直積空間Ｅ×Ｔの特徴付けの問題、そして今回の研究課題における球の直積の特徴付けの問題に繋がるものである。

(3) 「特殊領域の研究」においては、特にチューブ領域の研究に進展を見ている。とりわけチューブ領域上の完備多項式ベクトル場の延長に関する結果をある程度確立した意義は大きい。このことより、これまで手が付かなかった多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域の一般的研究が可能になり、そのための有用な方法も開発できた。今回の研究課題において重点的にチューブ領域の研究を取り上げるのは、そのようなことを踏まえて、多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域に関する正則同値問題の解決等が強く期待できるからであり、また完備多項式ベクトル場の延長に関する結果の完成が望まれるからである。

(4) 「多変数複素解析学における正則同値問題と関連諸問題へのリー群論的アプローチ」においては、Ｅ×Ｔをその正則自己同型群により特徴付ける問題を解決した。そしてその過程において、ラインハルト領域の理論を複素幾何学へ応用する手法を開発し、同時にリーマンの写像定理の高次元化についての着想を得た。これらは今回の研究課題「特殊領域の研究とその複素幾何学への応用」の大きな動機付けとなっている。さらに今回の研究課題の研究準備として、この調書の研究目的欄で述べた、リーマンの写像定理の高次元化としての球の直積の特徴付けの問題に対して、単独の球の場合についての考察を行った。

２．研究の目的

(1) 特殊領域(special domain)とは、ラインハルト領域、チューブ領域、ハルトーグス領域等の特別な形をもつ複素領域のことである。特殊領域は、多変数複素解析学の種々の分野の研究において、有用な実験モデルとなると同時に、それら自身が極めて興味深い研究対象である。本研究においては主に、特殊領域の中でも特に重要と考えられる、ラインハルト領域、チューブ領域の研究を行う。そしてそれらの研究を、リーマンの写像定理の高次元化などの、多変数複素解析学・複素幾何学における基本的な問題へ応用することを試みる。

(2) (1)の立場から、つぎの問題Ａを考える：Ｄをモデルとなるｎ次元複素数空間内の擬凸な特殊領域とし、Ｍを連結なｎ次元スタイン多様体とする。もしＭの正則自己同型群がＤの正則自己同型群に（コンパクト・開位相に関して）位相群として同型であるならば、ＭはＤに双正則同値になるか？
この問題Ａは、スタイン多様体に対するある種の問題が位相的に可解ならば解析的に可解であるという岡の原理に通ずるものである。そしてラインハルト領域、チューブ領域の研究と以下の(3)、(4)ように関連する。

(3) リーマンの写像定理の高次元化とラインハルト領域の研究：特殊領域の中で最も重要なものは複素平面内の単位円板Ｕであろう。実際、複素解析学は単位円板Ｕを基本的土台の一つとして構築されていると言っても過

言ではない。そしてよく知られたリーマンの写像定理は、（小林の意味で）双曲的な単連結リーマン面としての U を特徴付けている。この事実を高次元の場合に一般化すること、例えば次元が２以上の球を特徴付けること、あるいはもっと一般に球の直積を特徴付けることは多変数複素解析学・複素幾何学における非常に重要な課題である。しかしポワンカレが示した有名な事実として、球の直積は位相的条件と双曲性のみでは特徴付けられないことが知られている。そこで新しい視点からのアプローチが必要となってくる。当研究の大きな目的は、上記問題ＡをＤが球の直積として与えられた場合に解決することである。この場合に問題Ａを解決するためには、ラインハルト領域の研究、とくに（必ずしも有界とは限らない）擬凸なラインハルト領域の分類理論を深めることが必要である。これは同時にラインハルト領域に関する正則同値問題を解明することにも密接に関連し、本研究の姿勢の大きな特色となっている。

(4) 対称領域の特徴付けとチューブ領域の研究：単位円板 U は上半平面としての実現、すなわちチューブ領域としての側面ももつ。そして単位円板Ｕの一つの自然な一般化である対称領域は、重要な類として、チューブ領域としての実現をもつものを数多く含んでいる。この観点から、U がチューブ型の対称領域の場合において問題Ａを調べることは、対称領域のその正則自己同型郡による特徴付けを与えることとして興味ある課題である。

３．研究の方法

(1) リーマンの写像定理の高次元化とラインハルト領域の研究については、Ｄが一般の球の直積の場合の、問題Ａの解決を目指す。そして学内、学外のセミナーあるいは研究集会において、解決に向けて上げた成果を、随時発表する。また非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題の一般的な解決を試みる。そのひとつの方法としてはラインハルト領域の分類を行うことである。2次元のラインハルト領域の分類を基に、3次元のラインハルト領域の分類を試み、一般次元のラインハルト領域の分類に対する手がかりを探る。また、研究代表者の貢献も含め、ラインハルト領域に関するこれまでの研究結果の集積が理論と呼べるものになりつつあることから、それらを体系的にまとめるため、資料収集、関連分野の研究者との研究討論に努める。

(2) 対称領域の特徴付けとチューブ領域の研究については、多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域Ｖに関する正則同値問題へ、Ｖの無限小正則自己同型環ｇが可解で2次以下の完備多項式ベクトル場からなる場合、ｇが半単純で2次以下の完備多項式ベクトル場からなる場合、そしてｇが一般のリー環で2次以下の完備多項式ベクトル場からなる場合の順に解答を与えることを試みる。最終的には、多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域に関する正則同値問題を一般的に解決することを目標とする。また並行して、派生する問題である、球の直積のチューブ領域としての実現の剛性等について調べる。

４．研究成果

(1) n 次元複素ユークリッド空間の正則自己同型群Ｇの研究を行った。そして複素多様体上へのある種のコンパクト群作用の標準化に関する結果の応用として、G 内のコンパクトな連結リー群Ｋの階数は必ずｎ以下であり、K の階数が n のとき、K はユニタリ群の直積と共役になることを示した。さらにＧ内の非コンパクトな連結リー群で、n 次元単位球の正則自己同型群と同型であるものは存在しないことも示した。

(2) (1)とトーラス作用の研究に関連して、n 次元複素数空間の正則自己同型群の部分群 G でｎ次元コンパクトトーラスをその部分群として含むものの研究を行った。先ず、n = 2 のとき、G の一般的構造を、G のリー環の構造を調べることにより明らかにし、次にその考察を整理発展させ､次元ｎが一般のときの、G の構造を調べる組織的方法を確立した。さらに、穴あき複素平面のｎ個の直積空間の正則自己同型群の部分群でｎ次元コンパクトトーラスをその部分群として含むものの構造を考察するための重要な知見を得た。

(3) 球の直積のその正則自己同型群による特徴付けに関する研究を行い、新たな結果を得ると同時に既知の結果を発展させた。具体的には、M を n 次元スタイン多様体、B を球の直積空間で n 次元であるものとするとき、M の正則自己同型群が、B の正則自己同型群と同型な位相部分群を含むならば、M 自身が B と双正則同値になるかという問題に対して、B が多重円板の場合、あるいは B の各直積因子の次元が２以上である場合に肯定的な解答を与えた。

(4) (3)の研究に関連して、ｎ次元連結複素多様体Ｍに対して、その正則自己同型群がｎ次元対称領域Ｄの正則自己同型群と同型な位相部分群 G をもち、G の等方部分群がすべてコンパクトであるならば、Ｍ自身が D と双正則同値になるという、対称領域をその正則自己

同型群によって特徴付ける一つの結果を得た。

(5) 球と複素数空間からすべての座標超平面を引き抜いて得られる空間との直積空間に対して、その正則自己同型群による特徴付けに関する研究を行い、新たな結果を得た。具体的には、B を k 次元複素数空間内の単位球、Y を m 次元複素数空間からすべての座標超平面を引き抜いて得られる空間とし、X を B と Y の直積空間とするとき、k + m 次元スタイン多様体 M の正則自己同型群が、X の正則自己同型群と同型ならば、M 自身が X と双正則同値になるかという問題に対して、肯定的な解答を与えた。

(6) トーラス作用の研究の一環として、n 次元トーリック多様体上のアンプル直線束を d 回テンソル積したとき、それがある良い性質をもつための条件を、n と d とで評価した。また非特異射影的トーリック曲面上では、アンプル直線束とネフ直線束の大域切断の空間での積写像が全射になることが、凸多角形の組み合わせ論的議論により証明されているが、全射性の代数幾何的意味を解明して高次元化するために、代数幾何的証明を与えた。さらに K エネルギーという視点から、アインシュタイン・ケーラー計量、定スカラー曲率ケーラー計量、端的ケーラー計量、ケーラー・リッチ ソリトンを統一的に見直すという研究を行った。

(7) トーラス作用の研究に関連して、4 次元非特異トーリック・ファノ多様体の反標準因子が射影正規埋め込みを与えることを示した。また、アインシュタイン・ケーラー計量およびその一般化であるケーラー・リッチ ソリトンはともにそのケーラー類が反標準類(の定数倍)となることを踏まえ、ケーラー・リッチ ソリトンを一般のケーラー類の場合に拡張する問題を考察した。

(8) 特殊領域の境界の幾何学についての研究に関連して、強擬凸コンパクト CR 多様体上のヤング・ミルズ接続と、その上のサークル束上のフェファーマン距離に関するヤング・ミルズ接続との関係を調べ、第一変分公式、第二変分公式を導出し、境界作用素との関係を調べた。またコンパクトなリーマン多様体上の熱核が時刻を大きくするときの、定常解へ収束する速さを評価し（これをミキシング時間という)、リーマン多様体の幾何学的諸量との関係を導いた。

(9) 特殊領域の境界の研究から派生する微分幾何学問題の研究の一環として調和写像の研究を行った。特に、新たな変分問題として、２－調和写像や２－ヤング・ミルズ接続などがあることに着目し、これらに関する予想と結果を得た。最も大事な結果としては、B.Y. Chen 予想の部分的解決があり、「ユークリッド空間内の２－調和部分多様体は調和なものに限るか？」という問題について、「非正曲率空間への２－調和写像のテンション場とその共変微分が共に自乗可積分可能であるものは調和写像に限る」という解答を与えた。また、球面、複素射影空間、四元数射影空間内の２－調和な超曲面、の分類結果を得た。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 11 件）

① 清水悟、児玉秋雄、Addendum to our characterization of the unit polydisc、Kodai Math. J. (掲載確定)、査読有
② 清水悟、児玉秋雄、An intrinsic characterization of the direct product of balls、J. Math. Kyoto Univ.、49 巻、2009 年、619 頁-630 頁、査読有
③ 清水悟、児玉秋雄、An intrinsic characterization of the unit polydisc、Michigan Math. J.、56 巻、2008 年、173 頁-181 頁、査読有
④ 清水悟、児玉秋雄、Standardization of certain compact group actions and the automorphism group of the complex Euclidean space、Complex Variables and Elliptic Equations、53 巻、2008 年、215 頁-220 頁、査読有
⑤ 清水悟、児玉秋雄、Byun, Jisoo、A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and a Euclidean space、Forum Math.、18 巻、2006 年、983 頁-1009 頁、査読有
⑥ 清水悟、児玉秋雄、A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space, Ⅱ、J. Math. Soc. Japan、58 巻、2006 年、643 頁-663 頁、査読有

〔学会発表〕（計８件）

① 清水悟、正則自己同型群に関連する諸問題、複素解析研究集会、2010 年 1 月 10 日、山形県生涯学習センター遊学館
② 清水悟、標準的トーラスを含む複素ユークリッド空間の正則自己同型群の部分群、第 52 回函数論シンポジウム、2009 年 11 月 22 日、大阪府立大学

③　清水悟、An intrinsic characterization of the direct product of balls、Tambara Workshop 2009: Holomorphic Mappings and Diophantine Approximation、2009年10月12日、東京大学玉原国際セミナーハウス
④　清水悟、Remarks on our characterization of the unit polydisc、日本数学会秋季総合分科会、2009年9月27日、大阪大学
⑤　清水悟、An intrinsic characterization of the direct product of balls、The Twelfth Conference on Real and Complex Analysis (Korea-Japan Seminar on Analysis)、2008年12月4日、東北大学
⑥　清水悟、An intrinsic characterization of the unit polydisc、日本数学会秋季総合分科会、2007年9月24日、東北大学
⑦　清水悟、複素ユークリッド空間の自己同型群の部分群として与えられるリー群に関する２，３の注意、日本数学会秋季総合分科会、2006年9月19日、大阪市立大学
⑧　清水悟、複素ユークリッド空間の自己同型群の部分群に関する２，３の注意とその応用、第45回多変数関数論サマーセミナー、2006年8月6日、妙高高原ホテル太閤

〔図書〕（計１件）
①　浦川肇、朝倉書店、微積分の基礎、2006年、230頁

６．研究組織
(1)研究代表者
清水　悟（SHIMIZU SATORU）
東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：90178971

(2)研究分担者
児玉　秋雄（KODAMA AKIO）
金沢大学・理工研究域数物科学系・教授

研究者番号：20111320

中川　泰宏（NAKAGAWA YASUHIRO）
金沢大学・理工研究域数物科学系・准教授
（H20→H21：連携研究者）

研究者番号：90250662

尾形　庄悦（OGATA SHOUETU）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
（H20→H21：連携研究者）

研究者番号：90177113

浦川　肇（URAKAWA HAJIME）
東北大学・国際教育院・教授
（H20→H21：連携研究者）

研究者番号：50022679