

平成21年4月11日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006～2008
課題番号：18540165
研究課題名（和文） 粘性解理論に基づくハミルトン-ヤコビ方程式の漸近解の研究
研究課題名（英文） Study on asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi equations based on the theory of viscosity solutions
研究代表者 藤田 安啓 (Yasuhiro FUJITA) 富山大学 大学院理工学研究部（理学）准教授 研究者番号：10209067

研究成果の概要：まず、領域が n 次元ユークリッド空間全体るとき、Ornstein-Uhlenbeck 作用素を含む Hamilton-Jacobi 方程式の解の時間無限大での漸近解への収束の様子を明らかにした。続いて、この Hamilton-Jacobi 方程式から Ornstein-Uhlenbeck 作用素の粘性項が消去された場合に、漸近解への収束の様子を明らかにした。前者は確率制御理論への応用を持っている。後者は、Aubry-Mather 理論に基づく解の表現を新たに与えることを可能にした。

次に、領域が n 次元ユークリッド空間全体るとき、Hamilton-Jacobi 方程式の解の時間無限大での漸近解への収束率を遅くする要因が Aubry 集合の幾何学的な性質と初期値の下限との関係であることを明らかにした。これは、従来の研究が漸近解への収束のみを考えるものであった点から、収束率を遅くする要因を明らかにしたと言う点で一步踏み込んだ研究と考えられる。

その他として、上記研究に関連して2つの研究成果が得られた。ひとつは、相加相乗の不等式、ヘルダーの不等式、ヒルベルトの不等式の証明を Aubry-Mather 理論により導くというものである。もうひとつは、Ornstein-Uhlenbeck 作用素がポアンカレの不等式においてどのような役割を果たしているのかについて明らかにしたものである。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	660,000	4,060,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：粘性解理論, Hamilton-Jacobi 方程式, 漸近解, 収束率

1. 研究開始当初の背景

A. Fathi, J.-M. Roquejoffre 氏らにより、Hamilton-Jacobi 方程式の解の時間無限大での漸近解への収束の研究が領域がコンパクトな場合に考えられていた。これは、Aubry-Mather 理論に基づく、漸近解の表現公式に関連して得られたものであった。一方、領域がコンパクトでない場合の

コンパクトな場合に考えられていた。これは、Aubry-Mather 理論に基づく、漸近解の表現公式に関連して得られたものであった。一方、領域がコンパクトでない場合の

Hamilton-Jacobi 方程式の解の時間無限大での漸近解への収束の研究は、本研究開始当初はどの研究者によっても考えられていなかったようである。また、領域がコンパクトな場合に限っても、漸近解への収束率については考えられていなかった。

2. 研究の目的

Hamilton-Jacobi 方程式の解の時間無限大での漸近解への収束を領域が n 次元ユークリッド空間全体の場合について明らかにしてその構造を調べることであった。特に次の点に興味があった。

I. 漸近解の表現. Aubry 集合を使って如何に漸近解が表現されるか調べること。

II. 漸近解への収束率を決定する要因の決定. どのような要因が収束率を早くしたり遅くしたりしているか明らかにすること。

3. 研究の方法. 科研費で購入した本をもとに研究を進め、関連する研究者を訪問し研究に関する議論をして研究への理解度を深めていった。

また、関連する研究会に出席して研究者たちと議論をしたり、研究発表を行い発表に対する研究者たちの意見に耳を傾け研究成果の精密化・改良および本質の追求に努めた。

加えて、研究成果を論文に纏めることで、研究内容を多くの研究者に知ってもらおうと同時に広く意見を仰ぐよう努めた。

4. 研究成果

(i) 漸近解への収束およびその表現. 領域が n 次元ユークリッド空間全体るとき、Ornstein-Uhlenbeck 作用素を含む Hamilton-Jacobi 方程式の解の時間無限大での漸近解への収束の様子を明らかにした (以下の発表論文の [5])。続いて、この Hamilton-Jacobi 方程式から Ornstein-Uhlenbeck 作用素の粘性項が消去された場合に、漸近解への収束の様子を明らかにした(以下の発表論文の [4])。前者の証明においては、解の評価が本質的な役割を果たす。これは確率制御理論への応用をもっている。一方後者より、Aubry-Mather 理論に基づく漸近解の表現を新たに与えることが可能になった。これらについては、研究集会などで発表したうえで [4], [5] で研究論文としている。

(ii) 漸近解への収束率を決定する要因の解析.

(i) で得られた結果に基づき、領域が n 次元ユークリッド空間全体るとき、

Hamilton-Jacobi 方程式の解の時間無限大での漸近解への収束率を遅くする要因が Aubry 集合の幾何学的な性質と初期値の下限との関係であることを明らかにした(以下の発表論文の [2])。これは、従来の研究が漸近解への収束のみを考えるものであった点から、収束率を遅くする要因を明らかにしたという点で一步踏み込んだ研究と考えられる。これについては日本数学会 2007 年度年会の函数方程式分科会などを含むいくつかの研究集会で研究発表を行っている。

(iii) その他. 上記以外の研究成果として次の 2 点が上記研究に関連して得られた。

まず、以下の発表論文 [1] は、相加相乗の不等式、ヘルダーの不等式、ヒルベルトの不等式の証明を Aubry-Mather 理論により導くというものである。これについてはイタリアの国際研究会などでも発表を行っている。

次に、以下の発表論文 [3] は、発表論文 [5] に関連して、Ornstein-Uhlenbeck 作用素がポアンカレの不等式においてどのような役割を果たしているかについて明らかにしたものである。これについてもいくつかの研究集会で研究発表を行っている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

[1] Fujita, Y., Ohmori, K., Inequalities and the Aubry-Mather theory of Hamilton-Jacobi equations, Communications on Pure and Applied Analysis Vol. 8, No. 2 pp. 683 – 688 (2009).

[2] Fujita, Y., Uchiyama, K., Asymptotic solutions with slow convergence rate of Hamilton-Jacobi equations in Euclidean n space, Differential and Integral Equations Vol.20 pp.1185-1200 (2007)

[3] Fujita, Y., On a critical role of Ornstein-Uhlenbeck operators in the Poincare's inequality, Differential and Integral Equations Vol.19 pp.1321-1332 (2006).

[4] Fujita, Y., Ishii, H. and Loreti, P, Asymptotic solutions of Hamilton-Jacobi

equations in Euclidean n space, Indiana Univ. Math. J. Vol. 55 pp.1671-1700 (2006).

[5] Fujita, Y., Ishii, H. and Loreti, P., Asymptotic solutions of viscous Hamilton-Jacobi equations with Ornstein-Uhlenbeck operator, Communications in PDE Vol.31 pp.827-848 (2006).

[学会発表] (計 14 件)

1. Aubry-Mather 理論から導かれる不等式について, 実解析学シンポジウム 2008, 2008. 11. 07-09, 山口大学

2. Hamilton-Jacobi 方程式の商 Aubry 集合の完全非連結性について, 日本数学会秋季総合分科会, 函数方程式分科会, 2008. 09. 24-27, 東京工業大学

3. Hamilton-Jacobi 方程式により導くことができる不等式について, 日本数学会秋季総合分科会, 函数方程式分科会, 2008. 09. 24-27, 東京工業大学 (大森 克史 氏との共同研究)

4. Inequalities induced by Hamilton-Jacobi equation, 研究集会「Viscosity, metric and control theoretic methods, In nonlinear PDEs: analysis, approximations, applications」, 2008. 09. 02-05 SAPIENZA Universita di Roma

5. Some relations between Aubry sets and quotient Aubry sets, 研究集会「Viscosity Solutions of Differential Equations and Related Topics」, 2008. 06. 25-27 京都大学数理解析研究所

6. Hamilton-Jacobi 方程式に対する内部 Dirichlet 問題について, Mini-Workshop 「KAM 理論と粘性解」, 2008. 03. 19-20 福岡大学

7. On uniqueness sets for H-J equations, 研究集会「非線形偏微分方程式とその応用」, 2008. 01. 08-11 神戸大学

8. Hamilton-Jacobi 方程式の解の構造を決める極小な集合について, 九州関数方程式セミナー, 2007. 11. 02 九州大学

9. Hamilton-Jacobi 方程式の最小一意性集合とコントロール集合, 研究集会「確率論と PDE」, 2007. 10. 15-16 広島大学,

10. n 次元ユークリッド空間上の Hamilton-Jacobi 方程式の最小一意性集合の存在と非存在, 日本数学会秋季総合分科会, 函数方程式分科会, 2007. 09. 21-24, 東北大学

11. Existence and nonexistence of the minimal uniqueness set for Hamilton-Jacobi equations, 粘性解生誕 25 周年国際研究集会 (International Conference for the 25th Anniversary of Viscosity Solution), 2007. 06. 04-06, 東京大学・数理科学研究科

12. \mathbb{R}^n 上の Hamilton-Jacobi 方程式の解の漸近解への収束率の遅延要因, 日本数学会 2007 年度年会, 函数方程式分科会, 2007. 03. 27-03. 30, 埼玉大学理学部 (内山和哉 氏との共同研究)

13. \mathbb{R}^n 上の Hamilton-Jacobi 方程式の解の定常解への収束率とその周辺, 日本数学会秋季総合分科会, 実函数論分科会特別講演, 2006. 09. 19-09. 22, 大阪市立大学

14. Convergence rates of asymptotic solutions to Hamilton-Jacobi equations in Euclidean n space, 研究集会「Viscosity Solution Theory of Differential Equations and its Developments」, 2006. 05. 31-06. 02 京都大学数理解析研究所

6. 研究組織

(1)研究代表者

藤田 安啓 (Yasuhiro FUJITA)
富山大学・理工学研究部・准教授
研究者番号：10209067

(2)研究分担者 (平成18 - 19年度)

石井 仁司 (Hitoshi Ishii)
早稲田大学・教育学部・教授
研究者番号：70102887

吉田 範夫 (Norio Yoshida)
富山大学・理工学研究部・教授
研究者番号：80033934

池田 栄雄 (Hideo Ikeda)
富山大学・理工学研究部・教授
研究者番号：60115128

石井 克幸 (Katsuyuki Ishii)
神戸大学・大学院海事科学研究科・准教授
研究者番号：40232227

(3)連携研究者 (平成20年度)

石井 仁司 (Hitoshi Ishii)
早稲田大学・教育学部・教授
研究者番号：70102887

吉田 範夫 (Norio Yoshida)
富山大学・理工学研究部・教授
研究者番号：80033934

池田 栄雄 (Hideo Ikeda)
富山大学・理工学研究部・教授
研究者番号：60115128

石井 克幸 (Katsuyuki Ishii)
神戸大学・大学院海事科学研究科・准教授
研究者番号：40232227