様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月２８日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006～2009
課題番号：18540172
研究課題名（和文）　PISOT および SALEM 数の解析的研究

研究課題名（英文）　Analytic Study for Pisot and Salem numbers

研究代表者
畑　政義（HATA MASAYOSHI）
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：40156336

研究成果の概要（和文）：本研究では、PISOT 数および SALEM 数と呼ばれている極値的性質を持った代数的整数の研究を行った．その応用として、公比が自然対数の底 e という超越数の場合に等比数列 e^n の小数部分に関する評価を著しく改良することに成功した．もう一つのテーマである Mahler 測度に関する研究では、新しい結果を得ることはできなかったが、この問題をある連続関数のクラス上の非線形汎関数の極値問題として捉えることができた．

研究成果の概要（英文）：We successfully improved the earlier results on the lower bounds for the fractional part of e^n, where e is the base of natural logarithm and is known to be transcendental. This study was accomplished through that of Pisot and Salem numbers. Concerning the problem on Mahler measures (Lehmer problem) we can reduce it to an extremal problem of some non-linear functional.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	800,000	0	800,000
２００７年度	700,000	210,000	910,000
２００８年度	700,000	210,000	910,000
２００９年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	2,900,000	630,000	3,530,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：数論

１．研究開始当初の背景

(1) ヨーロッパにおいては仏国を中心として Pisot の伝統を受け継いだ数論の研究者たちが、この分野をリードしているのが現状である．例をあげれば、Bertin, Decomps-Guillux, Grandet-Hugot, Pathiaux-Deflefosse および Schreiber らの方法は、主として代数的方法に関数論、とりわけ Nevanlinna 理論の手

法に基づくものである．本研究は主として実解析的方法に重点を置いた研究であり、これが本研究の大きな特色をなす．また、北米では Boyd を中心とする研究者が Pisot 数および Salem 数に関する代数的な研究を行っている．超越数の公比に対する等比数列の研究に限ってみれば、Boyd の結果しか知られていないのが現状である．この点においても、超越数に関する何らかの知見が得られれば、極めて意義深いものになるのは間違いない．主として解析的手法を用いて有理近似および超越数の諸問題を以前より研究しており、超越数の無理数度等において新しい結果を導いてきた研究経緯がある．これらの方法を応用するのが第二の特徴である．

(2) これまで行ってきた Pade 近似の応用と言っても、等比数列の研究はかなり趣を異にする側面がある．それは、無理数度は近似の漸近挙動のみの考察から得られる情報であるのに対し、小数部分の問題はある程度大きな、しかし無限ではない近似の性質に依存するからである．言い換えれば、近似誤差の大きさが或る程度の大きさであるという条件下における最良近似分数の問題なのである．これが、無理数度の研究がヨーロッパにおいて盛んに行われ、それに伴い数々の新しい成果が発表された一方で、小数部分の研究はあまり進展がなかった理由なのであろう．このような背景の中で、本研究によって新たな手法を用いてその壁を打破していこうとするものである．

２．研究の目的

(1) Pisot 数および Salem 数と呼ばれる代数的整数に関する興味深い性質を、解析的に解明しようとするのが本研究の目的である。この問題は等比数列の小数部分の集積値の研究に由来する。固定した 0 でない初項をとると、ほとんどいたるところの公比 >1 に対してこの数列は一様分布することが知られている．このとき一様分布しない例外の場合が実際に起こり、ある条件を小数部分に課すと公比は必然的に Pisot 数あるいは Salem 数という特別な代数的整数になることが、Pisot と Vijayaraghavan によって独立に証明された．Salem 数は、この Pisot 数の定義を少し変形したものである．このような数は、数論以外にも例えば力学系の諸問題に頻繁に登場する重要な数であり、その代数的性質の研究は、Gelfont, Hardy, Thue, Siegel らによって研究され始め、最近でも多くの欧米の研究者によって盛んに研究が推し進められている．残念ながらわが国では応用面以外はあまりなじみがないのが現状である．

まず重要な未解決問題の一つに、公比が超越数の場合の等比数列の小数部分が、Pisot 数の場合と同じように振舞うことがありうるかどうかを問う問題がある．Pisot 自身はありえないと予想した．この問題に対し、本研究では解析的手法を駆使して取り組んでいく．従来扱ってきた Pade 近似の理論とは本質的に違う分野ではあるが、似た側面もあり、いろいろな方法を試すことが本研究の第一段階である．

(2) もう一つの重要な未解決問題として Mahler 測度の評価が知られている．Lehmer の問題とも呼ばれ、円分多項式を除けば Mahler 測度は 1 より大きな絶対定数以上になるであろう、という予想である．とても難しい問題として知られている．Salem 数の最小多項式の Mahler 測度は Salem 数自身だから、結局小さい Salem 数の研究になる．Pisot 数は閉集合であるが、Salem 数については閉ではないことが知られているが、集合としても未知の部分が多い．現在知られている最小の Salem 数は、Lehmer 自身が 1933 年に見つけた 10 次の代数的整数であるが、その後の計算機を用いた幾多の数値計算にもかかわらず、それよりも小さいものは一つも見出されていない．数値的には Lehmer 予想を支持している．本研究では、この一変数の Mahler 測度に関する問題とともに、多変数 Mahler 測度に対しても一般超幾何関数の特殊値に対する興味から積極的に研究に取り組んでいきたい．

(3) Pisot 数や Salem 数の研究は欧米においては伝統ある分野に成長しており、多くの若手研究者が輩出してきている．本研究では、そういった伝統をふまえつつ、これまでの有理近似の研究で培ってきた手法を駆使して、未解決問題に挑戦しようとするものである．もちろん、可能であれば、研究対象は Pisot 数や Salem 数に限らず、例えば 3/2 のような有理数のベキの小数部分の研究にも考察を広げていきたい．この問題は従来から考察を続けているもので、有名な Waring の問題における g(k) の表示と密接に関係している．e や 3/2 のような自然な数学的定数（非整数）を公比とする等比数列の小数部分に関しては 、さらに強く一様分布するであろうと予想されている．この点に関しても研究を行いたい．

３．研究の方法

(1) コンピュータを用いて数値計算および数式処理を行い、その結果を分析し有効に活

用することで本研究を補佐する．これに関連して、コンピュータのOSやアプリケーションのアップグレードなどによりソフトウェアを充実させ、より利便性・安全性の高い環境で計画を実行できるようにする．

(2) 数理解析研究所における代数的および解析的数論の研究集会に参加し、国内外の優れた研究者との情報交換を行う．また他大学における数論関係のセミナーに積極的に参加し、異分野の研究者との交流を計る．例えば、慶応義塾大学理工学部における超越数論セミナーや近畿大学九州工学部における近代整数論セミナーなどに参加する．またメール等を用いて、これまで共同研究してきた海外の数学者、例えばG. Rhin教授、F. Beukers教授、L. Habsieger教授、C. Viola教授などと、随時連絡を取り合い、研究を遂行していく．また、解析数論関係の最新の書籍の購入を適宜行う．

４．研究成果

(1) 超越数 e を公比とし初項が 1 である等比数列 e^n の小数部分の研究を行い、小数部分の下からの評価、つまり e^n とそれに最も近い整数との距離に関する新しい知見を得た．これは従来の Mahler, Mignotte, Wielonsky 等による評価を大きく改良するものである．この成果は 2009 年における研究集会「ディオファンタス解析とその周辺」において口頭発表し、また数論専門誌J. Number Theoryに発表することができた．これに関して、超越数論の専門家である Paris 大学の Waldschmidt 先生が昨年来日された折に報告したところ、賛辞をいただくことができた．

この研究の核心は Hermite-Pade 型複素積分の留数計算およびその評価、各係数の分母の最小公倍数の精密な評価にある．なお、Mahler が予想したように、e^{-nlog n}というオーダーの改良は本質的に極めて困難な問題であり、そのためには革新的なアイデアが必用であろう．この研究を通じて、これまでの無理数度の研究では遭遇しなかった一つの現象を発見したことは、成果とは言えないまでも今後の研究テーマと関連して大きな意味を持つと思われる．それは係数部と剰余部のオーダーが同じ関数形に従うだけでなく、共通素因数の積（これを除して近似を良くすることができる）のオーダーまでもが同じ関数形に従うという現象である．その仕組みについては未だに解明できてはいないが何か美しい定理が潜んでいるのかも知れない．ちなみに、公比を他の超越数、例えば円周率とした問題に関しては、ほとんど結果が知られていないばかりか、その高次のベキを有理近似する手がかりが全く知られていないのが現状である．

この成果を、さらに一般化することも可能である．例えば e^n の n の代わりに代数的整数を考え、最も近い整数との距離をその代数的整数の次数と高さで評価することができる．数論的には n の代わりに、n の平方根の円周率倍を考えると面白いのであるが、これは超越数になるので、ここで用いたPade近似による方法を適用することはできない．

この成果は、e^n と整数との距離があまりに小さくはならないことを量的に表すものであるから、直ちに、n の自然対数 log n と整数との距離があまり小さくはなれないことの量的な評価が導かれることに注意しておく．すなわち、特別の場合の対数の一次形式であり、これに関してはWaldschmidtによる一般的な予想が知られている．この予想には遥かに届かないのが現状であるが、これからの課題として研究を続けていきたい．

(2) Mahler測度の下からの評価に関する問題は有名な難問であり、じっくりと考察したものの新しい知見を得ることはできなかった．しかし、この研究を通じて、この問題をある種の非線形汎関数の極値問題に帰着することができた．正確に述べれば、Dobrowolskiの方法(あるいはFermatの小定理とHadamardの不等式を用いるCantorらの方法)において、各素数に与える指数の分布の仕方を分布関数を用いて定め、素数定理を用いて汎関数に帰着させるのである．このように実関数の汎関数の極値問題とすることによって、最良の分布なるものを求めることが可能となる．実は、これに似た方法を等比数列 e^n の小数部分の研究においても採用したのであり、そこでは効率よく最良パラメータを見出すことができた．しかし、この Mahler 測度の場合、Louboutin による現在までの最良評価を改良できなかったのは極めて残念ではあるが、それが最良であるとの証明もまだできていないので、改良の可能性はあるかも知れない．今後の研究課題である．Salem 数のような場合(つまり、他の共役元がほとんど単位円周の近くに分布する場合)が一番評価が悪くなるので重要なのだが、しかし実際の Dobrowolski らの証明を見る限り、そのことを積極的に用いては居ないのである．この点をさらに深く掘り下げることで、別の方法が発見できるのではないかと考えている．

(3) 本研究に関連して、素数定理の初等的証明に関する問題も考察した．素数定理は解析数論における一つの大いなる金字塔であり、通常は関数論においてゼータ函数の考察か

ら証明される．その初等的証明は Erdos と Selberg によるものであるが、大学初年度で学ぶ微分積分学程度の知識までを使って自然かつ容易に証明できることが確認できた．例えば、有限和だけども複雑な二重和や三重和の部分は多重積分で置き換えるのである．このようにして何を証明しようとしているのかを明瞭にすることができる．この点で教育的に大きな意味を持っていると思われる．ただ、初等的でない証明における Tauber 型定理の部分に相当する(初等的な)補題がやや難しい積分不等式を扱うことになるので、その部分をより簡単にすることが望まれるであろう．

　これに関しては World Scientific 社より出版した拙本に詳しく述べている．この本を通じて、解析数論の面白さを早い段階で若者に伝えることができれば幸いである．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
① Masayoshi Hata, A lower estimate for ||e^n||, Journal of Number Theory 130, 2010, pp.1685-1704.

〔学会発表〕（計１件）
① 畑　政義、Diophantine Analysis and Related Fields 2009, 日本大学理工学部, 2009 年 3 月 2ー3 日.

〔図書〕（計１件）
① Masayoshi Hata, PROBLEMS AND SOLUTIONS IN REAL ANALYSIS, Series on Number Theory and Its Applications, Vol.4, World Scientific, 2007, pp.292.

６．研究組織
(1)研究代表者
　畑　政義（HATA MASAYOSHI）
　京都大学・大学院理学研究科・準教授
　研究者番号：40156336