様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　５月１０日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2006～2008
課題番号：１８５４０１７４
研究課題名（和文）　パンルベ階層の接続問題とＷＫＢ解析

研究課題名（英文）　Connection problems for Painlevé hierarchies and WKB analysis

研究代表者
竹井　義次　（TAKEI Yoshitsugu）
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：00212019

研究成果の概要：本研究では、完全ＷＫＢ解析を用いて高階パンルベ方程式の接続問題を解明することを目的として研究を進め、高階パンルベ方程式の階層に対する完全ＷＫＢ解析の枠組をほぼ構築することに成功した。具体的には、接続問題を論じる際の主役となる（インスタントン型）形式解の構成、第一種変わり点における局所的構造定理（即ち、第一種変わり点では２階のパンルベＩ型方程式へ変換できること）の確立、第二種変わり点での標準型の発見、等の諸結果が得られた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	1,200,000	0	1,200,000
２００７年度	900,000	270,000	1,170,000
２００８年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	660,000	4,060,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：代数解析、ＷＫＢ解析、パンルベ階層、ガルニエ系

１．研究開始当初の背景

Borel総和法に基礎を置く完全WKB解析は、特異摂動型の微分方程式、とりわけその大域的な接続問題の解析に非常に有効である。Fuchs 型２階線型常微分方程式のモノドロミー群の具体的計算法（cf. 河合・竹井，特異摂動の代数解析学，岩波書店，1998）や完全WKB 解析を用いた Painlevé II 型方程式に対する Ablowitz-Segur の接続公式の導出（Takei, ANZIAM J., **44**(2002), 111-119）等、２階の線型及び非線型常微分方程式の完全WKB 解析については、本研究開始当初の段階までにほぼその基礎的な枠組が構築されていた。

さらに、本研究の前身となった科学研究費補助金基盤研究(C)「可積分系と WKB 解析」（2001 年度～2003 年度,課題番号:13640167, 研究代表者：竹井義次）及び同「高階パンルベ方程式の完全 WKB 解析」(2004, 2005 年度, 課題番号：16540148, 研究代表者：竹井義次）において、

(1) Ｉ型やＩＩ型の高階 Painlevé 方程式の

階層、及び野海・山田の両氏により発見されたアフィン Weyl 群対称性を持つ高階 Painlevé 方程式に対して、それらの Stokes 幾何とモノドロミー保存変形を通じて付随する線型方程式系（“Lax pair”）の Stokes 幾何とが密接に関連すること（Kawai-Koike-Nishikawa-Takei, Astérisque, **297**(2004), 117-166; Takei, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **40**(2004), 709-730)、

(2) I 型 Painlevé 方程式の階層に対して、Hamilton 系の Birkhoff 標準型への簡約化を利用して、自由パラメータを含んだインスタントン型形式解が構成できること、

(3) 第一種と第二種という二種類がある高階 Painlevé 方程式の変わり点のうち、2 階の場合の自然な拡張である第一種変わり点の近くでは、自由パラメータを含まない形式解（“0パラメータ解”）に対して局所的構造定理、すなわち2階の I 型 Painlevé 方程式への変換論が成立すること（Kawai-Takei, Proc. Japan Acad., Ser. A, **80**(2004), 53-56)、

等の諸結果が得られていた。これらは完全WKB解析の高階Painlevé方程式への拡張可能性を強く支持するものと考えられる。以上の状況を背景として、本研究が開始された。

２．研究の目的

前項で述べた状況を背景として、本研究では、完全 WKB 解析を高階 Painlevé 方程式の成す階層（ヒエラルキー）にまで拡張しその基礎的な枠組を構築すると同時に、それを応用することによってこれまで殆んど手がつけられていなかった高階 Painlevé 方程式の接続問題に対する明示的公式、いわば Ablowitz-Segur の接続公式の高階版、を得ることを目的とする。

より具体的な目標は以下の通りである。2 階の Painlevé 方程式に対する完全 WKB 解析は、主として次の４つの基本性質、すなわち、(i) Painlevé 方程式の Stokes 幾何と、モノドロミー保存変形を通じて付随する線型方程式系、いわゆる Lax pair の Stokes 幾何との関連、(ii) Painlevé 方程式のインスタントン型形式解（自由パラメータを含んだ形式解）の構成、(iii) 単純変わり点における局所的構造定理、すなわち単純変わり点の近くでは任意の Painlevé 方程式のインスタントン型形式解がI型のPainlevé方程式のインスタントン型形式解に変換されること、(iv) I 型の Painlevé 方程式のインスタントン型形式解に対する接続公式の決定（上記(iii)と合わせれば、これは一般の Painlevé 方程式のインスタントン型形式解の接続公式が決定されたことを意味する)、から構成されていた。これらの基本性質を高階 Painlevé 方程式の階層に対しても確立したい。上述したように、これ以前の研究によって(i)、(iv)、及び I 型の Painlevé 階層に対する(ii)、さらに自由パラメータを含まない０パラメータ解に対する(iii)については既に結果が得られている。高階 Painlevé 方程式の場合には第一種と第二種という二種類の変わり点が存在することを念頭に置けば、従って本研究の具体的な目標を次のように設定することはごく自然であると考えられる。

(1) I 型以外の Painlevé 階層等、一般の Painlevé 階層に対する自由パラメータを含んだインスタントン型形式解の構成。

(2) 第一種変わり点の近傍におけるインスタントン型形式解に対する局所的構造定理の確立。

(3) 第二種変わり点での高階 Painlevé 方程式の標準型の発見。

(4) 高階 Painlevé 方程式のインスタントン型形式解の接続公式の決定。

さらに、これらの基本性質の応用として、

(5) 高階 Painlevé 方程式に対する大域的な接続問題の考察。

実際には、モノドロミー保存変形を通じて付随する線型方程式系（Lax pair）の構造が簡単な I 型や II 型の Painlevé 方程式の階層に対して、まずはこれらの目標を達成することに取組む。それが達成されれば、これまで殆んど結果の得られていなかった高階 Painlevé 方程式の接続問題の分野に画期的な進歩がもたらされると期待される。

３．研究の方法

基本的には理論的な考察が中心となる。加えて、研究分担者（2008 年度は連携研究者）の小池達也氏の協力を仰ぎながら、Stokes 曲線の描画やインスタントン型形式解の構成にあたっての数式処理においては計算機も適宜利用する。実際の研究は、研究代表者の竹井と分担者の小池が定期的に（１、２週間に１度程度）会って議論を進めて行く。

以下、上記具体的目標の(1)～(5)のそれぞれについて、どのように研究を進めるかの方針を簡単に述べる。

(1) I 型の Painlevé 階層の場合には、Hamilton 系の Birkhoff 標準形への簡約化を利用してインスタントン型形式解を構成することができた。それを踏まえ、一般の Painlevé 階層に対してもまず Hamilton 構造を調べた上で、I 型の Painlevé 階層の場合の議論を適用する。

(2) 自由パラメータを含まない０パラメータ解の場合の結果から予想されるように、高階 Painlevé 方程式の場合も２階の I 型 Painlevé 方程式が第一種変わり点における標準型を与えると考えられる。２階の

Painlevé 方程式に対する構造定理の証明を参考にして、０パラメータ解の場合の結果をインスタントン型形式解に拡張することに取り組む。

(3) ０パラメータ解の場合に見つかっている標準型の候補を詳しく検討すると共に、それがうまく行かない場合は２変数の（退化）Garnier 系等を参考に第二種変わり点での標準型を探す。

(4) ２階のＩ型 Painlevé 方程式が標準型を与えると予想される第一種変わり点については（その標準型の接続公式が既知なので）本質的な困難はない。第二種変わり点の方は、(3) で見出された標準型の詳細な解析が必要となる。

(5) (4)で得られた接続公式と、Stokes 曲線や新しい Stokes 曲線の解析とを組み合わせて、高階 Painlevé 方程式に対する具体的な接続問題を考察する。

本研究は、Ecalle の resurgent functions の理論の立場から２階線型方程式の完全 WKB 解析を推し進める Voros（仏; Saclay）や Delabaere（仏; Angers）等の研究と、主として Painlevé 方程式の特異点での漸近解の構造を問題とする Costin（米; Rutgers, 現在は Ohio）、Joshi（豪; Sydney）等の研究を我々の視点から融合しようとするものと言うことができる。これらの専門家や、我々の研究の良き協力者であり理解者でもある河合隆裕氏（京都大学）や青木貴史氏（近畿大学）、さらに国内の関連する研究分野の研究者と必要に応じて研究打合せを行いながら研究を進めて行く。

４．研究成果

本研究によって、上記の具体的目標にそって言えば、(1)～(3)の目標がほぼ達成された。より具体的に述べれば、

(1) 研究分担者の小池達也氏によって、II 型及び IV 型の Painlevé 階層が Painlevé 方程式の多変数版である（退化）Garnier 系の適当な１次元複素直線への制限として得られること、その結果として上記の Painlevé 階層にも自然な Hamilton 構造が導入されることが示された（「主な発表論文等」の〔雑誌論文〕の項の [9], [4]；発表論文の記号については以下でも同じ項の番号を用いる）。先に得られている Birkhoff 標準形への変換を利用したＩ型の Painlevé 階層に対するインスタントン型形式解の構成法（cf. [6]）とこの結果を組み合わせれば、これで II 型や IV 型の Painlevé 階層に対してもインスタントン型形式解が構成されたことになる。

(2) 河合隆裕氏と共同で、第一種変わり点における自由パラメータを含まない０パラメータ解に対する局所的構造定理を、２階の Painlevé 方程式の場合の議論を自然に一般化する形で、インスタントン型形式解にまで拡張することに成功した（[12], [3]; cf. [11]）。これにより、高階 Painlevé 方程式に対しても、第一種変わり点から出る Stokes 曲線上では２階のＩ型 Painlevé 方程式と同じ形の接続公式が成立することが明らかになった（cf. [10]）。

(3) やや特殊な２変数退化 Garnier 系の１次元複素直線への制限として、第二種変わり点での標準型と考えられる４階方程式が見出された。ここで現れた退化 Garnier 系は、下記の〔関連する研究結果〕でも論じた(D_8)型の退化した III 型 Painlevé 方程式の２変数版とも言えるものである。

残念ながら、第二種変わり点での標準型と考えられる４階方程式の接続公式の決定は時間の不足で達成できなかったが、高階 Painlevé 方程式の階層に対する完全 WKB 解析の枠組はほぼ構築されたと考えられる。第二種変わり点での標準型の方程式に対する接続公式の決定、及びそれを用いた高階 Painlevé 方程式の接続問題の解析は今後の課題としたい。

なお、本研究課題の遂行にあたって、並行して研究目的と密接に関連するいくつかの話題についても考察し、興味深い結果を得ることができた。これらはいずれも今後の新しい研究テーマとなる芽を含んでいると思われるので、最後にそれら関連する研究結果をまとめておく。

〔関連する研究結果〕

① (D_8)型の退化した III 型 Painlevé 方程式の接続公式等の構造を、大学院生（当時）の若子英晶君と共同で解明した ([8])。さらに、この III 型 Painlevé 方程式が、２階の Painlevé 方程式の単純極における標準型を与えることを証明することに成功した（現在論文を準備中）。上の(3)でも触れたように、この研究は高階 Painlevé 方程式の第二種変わり点での標準型を見出す際に大いに参考になった。

② 2008年に来日した Silverstone 教授（米; Johns Hopkins）との議論をきっかけとして、河合隆裕氏、青木貴史氏と共同で、２個の合流する単純変わり点をもつ２階線型方程式の WKB 解の Borel 変換の構造を研究した。特に、線型方程式の WKB 解の Borel 変換が持つ動かない特異点の構造を、Weber 方程式への変換論を用いて解析することに成功した（[1], [2]）。そこでは、方程式に含まれているパラメータに関するある種の差分方程式が重要な役割を果たしている。将来の重要な課題である（高階）Painlevé 方程式の形式解の Borel 変換が持つと期待される動かない特異点の解析が、Painlevé 方程式の

Bäcklund 変換を利用してなされる可能性を示唆する興味深い結果と考えられる。
③ 上記研究成果(1)や(3)でも出てきたように、高階 Painlevé 方程式と多変数の Garnier 系との間には密接な関連がある。この関連を念頭に置けば、偏微分方程式系の完全 WKB 解析は是非とも解明したい重要なテーマである。その第一歩として、ある種の偏微分方程式の初期値問題の形式解の総和可能性を完全 WKB 解析の視点から考察し、変数係数の方程式の場合にはこの問題にも Stokes 幾何が関係することを明らかにした（現在論文を準備中）。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１２件）

[1] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, The Bender-Wu analysis and the Voros theory. II, Advanced Studies in Pure Mathematics, 54 巻, 2009, 19-94, 査読有

[2] Y. Takei, Sato's conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B10 巻, 2008, 205-224, 査読有

[3] T. Kawai and Y. Takei, Half of the Toulouse Project Part 5 is completed — Structure theorem for instanton-type solutions of $(P_J)_m$ (J=I, II or IV) near a simple P-turning point of the first kind, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B5 巻, 2008, 99-115, 査読有

[4] T. Koike, On new expressions of the Painlevé hierarchies, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B5 巻, 2008, 153-198, 査読有

[5] T. Aoki, N. Honda, T. Kawai, T. Koike, Y. Nishikawa, S. Sasaki, A. Shudo and Y. Takei, Virtual turning points — A gift of microlocal analysis to the exact WKB analysis, Algebraic Analysis of Differential Equations（会議録）, 2008, 29-43, 査読有

[6] Y. Takei, Instanton-type formal solutions for the first Painlevé hierarchy, Algebraic Analysis of Differential Equations（会議録）, 2008, 307-319, 査読有

[7] Y. Takei, Exact WKB analysis, and exact steepest descent method — A sequel to "algebraic analysis for singular perturbations" —, Sugaku Expositions, 20 巻, 2007, 169-189, 査読有

[8] Y. Takei and H. Wakako, Exact WKB analysis for the degenerate third Painlevé equation of type (D_8), Proceedings of the Japan Academy, Series A, 83 巻, 2007, 63-68, 査読有

[9] T. Koike, On the Hamiltonian structures of the second and the fourth Painlevé hierarchies, and the degenerate Garnier systems, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2 巻, 2007, 99-127, 査読有

[10] Y. Takei, Toward the exact WKB analysis for instanton-type solutions of Painlevé hierarchies, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2 巻, 2007, 247-260, 査読有

[11] Y. Takei, On a local reduction of a higher order Painlevé equation and its underlying Lax pair near a simple turning point of the first kind, Séminaires et Congrès, 14 巻, 2006, 251-267, 査読有

[12] T. Kawai and Y. Takei, WKB analysis of higher order Painlevé equations with a large parameter, Advances in Mathematics, 203 巻, 2006, 636-672, 査読有

〔学会発表〕（計１３件）

[1] Y. Takei, Exact WKB analysis for simple-pole type singularities of Painlevé equations,「数理物理学セミナー」, 2009 年 3 月 17 日, Paris 第 7 大学 (France)

[2] Y. Takei, On the summability and Stokes phenomena for formal solutions of some PDEs — An exact WKB approach,「微分方程式論セミナー」, 2009 年 3 月 13 日, Angers 大学 (France)

[3] Y. Takei, Transformation theory for MTP equations and singularity structure of the Borel transform of their WKB solutions,「Foundations of exact WKB analysis and resurgence theory」, 2008 年 12 月 17 日, 18 日, 関西セミナーハウス

[4] Y. Takei, On the summability and Stokes phenomena for formal solutions of some

PDEs — An exact WKB approach, 「解析的な方程式の新しい取り組み」, 2008 年 9 月 17 日, 京都大学数理解析研究所

[5] Y. Takei, On the exact WKB analysis for the degenerate third Painlevé equation, 「Exact WKB Analysis and Microlocal Analysis」, 2008 年 5 月 27 日, 京都大学数理解析研究所

[6] Y. Takei, On the transformation theory for Schrödinger equations with two merging turning points, 「偏微分方程式姫路研究集会」, 2008 年 2 月 22 日, 兵庫県立大学

[7] T. Koike, On the eigenvalue problem of the Coulomb potential and exact WKB analysis, 「Holomorphic partial differential equations, small divisors and summability」, 2008 年 1 月 29 日, Centre International de Rencontres Mathématiques (Marseille, France)

[8] T. Koike, 単純極型作用素の完全 WKB 解析について, 「超幾何方程式研究会２００８」, 2008 年 1 月 7 日, 神戸大学

[9] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, The Bender-Wu analysis and the Voros theory (Part 2), 「Differential Equations and Exact WKB Analysis」, 2007 年 10 月 11 日, 12 日, 京都大学数理解析研究所

[10] Y. Takei, On the theory of transformation for operators with two merging simple turning points, 「Recent development of global and micro-local analysis on partial differential equations」, 2007 年 9 月 14 日, 龍谷大学

[11] T. Kawai and Y. Takei, Structure of instanton-type solutions of higher order Painlevé equations near a simple turning point of the first kind, 「Algebraic Analysis and the Exact WKB Analysis for Systems of Differential Equations」, 2006 年 12 月 12 日, 京都大学数理解析研究所

[12] Y. Takei, Toward the exact WKB analysis for instanton-type solutions for Painlevé hierarchies, 「Workshop on Applied Asymptotics and Modelling」, 2006 年 6 月 30 日, International Centre for Mathematical Sciences (Edinburgh, UK)

[13] Y. Takei, Toward the exact WKB analysis for instanton-type solutions of Painlevé hierarchies, 「Algebraic, Analytic and Geometric Aspects of Complex Differential Equations and their Deformations. Painlevé Hierarchies」, 2006 年 5 月 20 日, 京都大学数理解析研究所

〔図書〕(計２件)

[1] 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 2008, 132 ページ (1998 年発行の岩波講座版の単行本化)

[2] T. Aoki, H. Majima, Y. Takei and N. Tose (eds.), Algebraic Analysis of Differential Equations — from Microlocal Analysis to Exponential Asymptotics, Festschrift in Honor of Takahiro Kawai, Springer-Verlag, 2008, 352 ページ

６．研究組織

(1)研究代表者

竹井　義次　(TAKEI Yoshitsugu)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号： 00212019

(2)研究分担者

小池　達也　(KOIKE Tatsuya)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号： 80324599
(2006～2007 年度)

(3)連携研究者

小池　達也　(KOIKE Tatsuya)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号： 80324599
(2008 年度)