

平成 21 年 4 月 15 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2008

課題番号：18540183

研究課題名（和文） レビー過程の確率解析

研究課題名（英文） Stochastic calculus for Levy processes

研究代表者

石川 保志 (ISHIKAWA YASUSHI)

愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号:70202976

研究成果の概要：

加法過程のひとつであるレビー過程について、Malliavin 解析、漸近展開、確率的コントロール問題の3つの側面から研究をおこなった。このうち、漸近展開、確率的コントロールに関しては、数理ファイナンスと密接に関連する成果を得た。成果は研究会で発表された。また、論文にまとめられ、すでに出版されたか、または印刷中、投稿中である。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,000,000		1,000,000
2007 年度	900,000	270,000	1,170,000
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	540,000	3,340,000

研究分野：理学

科研費の分科・細目：数物系科学・基礎解析学

キーワード：レビー過程、確率過程

1. 研究開始当初の背景

本研究の背景となる数学的基礎は次の3つである。

(1) Malliavin 解析

確率変分学は今日では Malliavin 解析とよばれる。この方法は元来確率微分方程式の解の滑らかさを示すために P. Malliavin, Nualart, 渡辺, 重川らにより開発された。それ以来多数の研究者がこの理論に取り組み、Wiener 空間上の理論を完成させた。その後、Poisson 空間上の理論が Picard らにより開発され、現在も継続して構築されている。

Wiener 空間では、Malliavin 作用素を使う方法と重川微分を使う方法があり、両者の同

値性は Meyer 不等式により保証される。Poisson 空間上にも同じように Malliavin 作用素と「微分」(差分)作用素を導入することができる。しかしながら、Poisson ランダム測度のレビー測度が絶対連続か否かにより、Poisson 空間上のソボレフ空間は種々の定義が採用可能であり、いまだに決定版はない。

また、早くから Malliavin 解析のファイナンス理論への応用が意識されていた。オプション価格つけのための最小分散ヘッジはその一例である。Malliavin 解析により、オプション価格つけの際必要となる「重み」の具体的な表現を得ることができる。

(2) 漸近展開

ソボレフ空間を構築した後、ある小さいパラメータに関するその上の確率変数族について、このパラメータに関する漸近展開を考えることができる。さらに期待値をとることにより、オプション価格の漸近展開、オプション価格等の“Greeks”の展開、および、確率微分方程式の解の密度関数の漸近展開を得ることができる。

Wiener 空間上では、このような仕事は吉田によりすでになされており、国友および高橋はそれをファイナンスに応用して、それが強力な道具立てであることを確認した。一方、Poisson 空間上では、この理論が吉田、増田らにより開発され始めたが、上のような結果はいまだに得られていない。

(3) 確率的コントロール問題

偶然の変動に支配される力学系において、制御問題を考察することが 1960 年代から行われてきた。とくに今日では、ジャンプ-拡散過程による力学系を考え、適当な効用関数を最適化する制御手段を考察することが問題である。

2. 研究の目的

この研究の目的は

- レビー過程によってドライブされる確率微分方程式(SDE)の解をしらべること
- レビー過程に関連した統計量の漸近展開理論の拡張し、確率解析を応用したファイナンス理論における“Greeks”(経済特性量)の数値計算のための漸近展開の応用すること
- ジャンプ-拡散型の制御問題を考察することである。

(a)については、レビー測度が一般の(ルベグ測度について絶対連続とは限らない)場合に、Wiener-Poisson 空間上のソボレフ空間を構築し、その上の Malliavin 解析を開発し、ジャンプ型 SDE の解の絶対連続性を調べることを目的とした。

(b)については、Wiener-Poisson 空間上の漸近展開の理論を構築し、その結果のファイナンスへの応用をはかる事を目的とする。従来の Black-Sholes モデルでは「ボラチリティの笑い」を説明できないことはよく知られており、Wiener-Poisson 空間上のモデルを考えることによりこの困難の解決をはかる。

(c)については、ジャンプ-拡散過程による力学系を考え、適当な効用関数を最適化する制御手段を考察した。具体的には、ジャンプ過程に対応した最適停止問題と最適消費問題を解いた。この問題は究極的には

Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を解くことに帰着される。解は一般的に滑らかでなく、粘性解(viscosity solution)の概念が必要となる。粘性解の定義、存在と一意性について数学的解析を行った。

3. 研究の方法

(a), (b)については、論文を収集・分析し、計算を行い、プレプリント論文を作成し、研究会等の機会に同業者と討論し、学会で発表し、学術雑誌に投稿した。とくに(b)については、ジャンプ=拡散型の確率的変動モデル(株価モデルなど)を構成し、その漸近展開を導く手法を採用した。

(c)については、ジャンプ-拡散過程による力学系を考え、適当な効用関数を最適化する制御手段を考察した。これは論文 Ishikawa Yasushi, Optimal control problem associated with jump processes, Appl. Math. Optimization 50, No. 1, 21-65 (2004).

において示したベルマン原理をジャンプ-拡散過程に適用し、最適停止、最適消費問題を解くことによる。

また、これらの研究成果を、京都大学、統計数理研究所で行われた研究会において発表した。またいくつかのセミナーにおいても発表を行った。

4. 研究成果

(a) については

論文 1 において Wiener-Poisson 空間上のソボレフ空間を構成し、この上の Malliavin 解析を展開した。具体的には、Picard の差分作用素とその随伴作用素を定義し、これを使って部分積分公式を導いた。また、超関数値の確率変数の空間を定義し、確率変数と蝶関数の合成を定義した。論文 5, 6, 7 はこれに関連する成果である。

(b) については

神戸大学博士学生(現京都大数理解析研究所研究員)林正史氏と共同して、Wiener-Poisson 空間上の超関数値確率変数に対して、その漸近展開の理論を構成した。この結果(の Poisson 空間の部分)は林氏の博士論文となり、Journal of Mathematics of Kyoto University 48 (2008), 91-132 に掲載された。

(c) については、分担者の森本氏と協力しながら、ジャンプ過程の最適停止問題、最適消費問題を考察した。それぞれの場合について、

対応する HJB 方程式を導出し、それを解いて値関数の存在、一意性、滑らかさに関する種々の性質を示した。これらの結果は、論文 2, 3, 4, (8), (9)にまとめられた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 8 件)

1 Ishikawa, Yasushi and Kunita, Hiroshi, Malliavin calculus applied to mathematical finance and a new formulation of the integration-by-parts, Stochastic Processes and their Applications, 116, 1743-1769, 2006, 査読有

2 Morimoto, Hiroaki, The probabilistic solution of the Dirichlet problem for degenerate elliptic equations, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, 54, 163-174, 2006, 査読有

3 Ishikawa, Yasushi, Optimal control problem associated with jump-diffusion processes and optimal stopping, 数理解析研究所講究録, 1529, 42-63, 2007, 査読無

4 Morimoto, Hiroaki, Optimal consumption models in economic growth, J. Math. Anal. Appl., 337, 480-492, 2008, 査読有

5 Ishikawa, Yasushi and Thomas, Simon, レビー過程に関連した確率変数の連続性と絶対連続性, 統計数理研究所共同研究レポート 213, 104-132, 2008, 査読有

6 Ishikawa, Yasushi, Composition with distributions of Wiener-Poisson variables and its asymptotic expansion, 統計数理研究所共同研究レポート 225, 82-91, 2009, 査読有

7 Ishikawa, Yasushi, Malliavin calculus applied to mathematical finance and a new formulation of the integration-by-parts, 数理解析研究所講究録 1620, 67-80, 2009, 査読無

(8) Yasushi ISHIKAWA, Optimal stopping problem associated with jump-diffusion processes, preprint, 2008 (submitted)

(9) Yasushi Ishikawa Hiroaki Morimoto, Optimal Consumption Control Problem associated with Jump-Diffusion

Processes, preprint, 2008 (submitted)

〔学会発表〕(計 7 件)

(1) Ishikawa Yasushi, Composition with distributions of Poisson variables and its asymptotic expansion, Levy Processes: Theory and Applications, 2007 年 8 月 13 日, Copenhagen University (poster)

(2) 石川 保志, Optimal Consumption Control Problem associated with Jump-Diffusion Processes, The 8th workshop on "Stochastic Numerics", 2008 年 7 月 8 日, 京都大学

(3) 石川 保志, Optimal Consumption Control Problem associated with Jump-Diffusion Processes, 無限分解可能過程に関連する諸問題, 2008 年 11 月 8 日, 統計数理研究所

(4) 石川 保志, Composition with distributions of Wiener-Poisson variables and its asymptotic expansion (I), Stochastic Analysis and Statistical Inference III, 2008 年 11 月 26 日, 東京大学

(5) 石川 保志, Composition with distributions of Wiener-Poisson variables and its asymptotic expansion (II), Stochastic Analysis and Statistical Inference IV, 2009 年 2 月 18 日, 東京大学

(6) 森本宏明, 変分不等式の粘性解と American put options, 微分方程式の漸近問題と粘性解理論, 2006 年 12 月, 富山大学

(7) 森本宏明, Viscosity solutions of parabolic Hamilton-Jacobi equation in economic growth, 広島応用解析セミナー, 2008 年 9 月 2 日, 広島大学

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況 (計 0 件)

取得状況（計0 件）

〔その他〕

なし

6 . 研究組織

(1)研究代表者

石川 保志 (ISHIKAWA YASUSHI)

愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：70202976

(2)研究分担者

森本 宏明 (MORIMOTO HIROAKI)

愛媛大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：80166438

(3)連携研究者