

平成 21 年 6 月 5 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540193

研究課題名(和文) ネヴァンlinna理論と確率論の接点

研究課題名(英文) Probabilistic aspects of Nevanlinna theory and their applications

研究代表者

厚地 淳 (ATSUJI ATSUSHI)

慶應義塾大学・経済学部・教授

研究者番号：00221044

研究成果の概要：

ネヴァンlinna理論は、有理形関数の除外点の個数を評価するなどの有理形関数の値分布の研究に使われる基本的な理論である。古典的なネヴァンlinna理論が確率論を使って記述できることは研究代表者などの研究により知られている。本研究は、この確率論との関係をより深く研究することにより、一般のケーラー多様体上で定義されている有理形関数に対するネヴァンlinna型理論を構築する。さらにそれを応用して、ケーラー多様体上の有理形関数の値分布、特に除外点の個数の評価への応用を研究した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	700,000	0	700,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,100,000	420,000	2,520,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：ネヴァンlinna理論，有理形関数，多様体上のブラウン運動，値分布論

## 1. 研究開始当初の背景

ネヴァンlinna理論は、R. ネヴァンlinnaによる研究(1926)に源を発する長い歴史を有する理論である。対象を有理形関数から正則写像に拡張するなど、ネヴァンlinna以後さまざまな発展があり、現在に至っている。特に、正則写像の値域の多様体を拡張する試みは、微分幾何学・代数幾何学・正則曲線の理論の発展に伴って非常に進展している。定義域を拡張する研究は、Wu(1966)によりリーマン面間の正則写像に拡張され、Griffiths-King(1973)らによって多変数化

が行われ、代数多様体間の正則写像などに拡張された。その後、最も一般の定義域に拡張したのは、W. Stollであった。Stollは、定義域を放物多様体と呼ばれるクラスの多様体に拡張した(1977)が、これは複素ユークリッド空間や放物的リーマン面をモデルにしたものであり、一部の負曲率多様体などの多様体は除外される。それ以後は、この分野の進展はなかった。

一方、ネヴァンlinna理論と確率論の関係に関する研究は、Carne(1986)が最初である。さらに、本研究代表者の研究(1995)が行われ、

ネヴァンリンナ理論とブラウン運動を基礎とした確率解析との基本的な関係が論じられた。ネヴァンリンナ理論と確率論は、非常に基本的な関係を持つことがわかってきたので、今まで複素関数論の分野では用いられなかった確率解析に基づいた新しい視点から、より一般の多様体上で定義された有理形関数に対しても適用可能なネヴァンリンナ型の定理に拡張する研究を開始した。

## 2. 研究の目的

ネヴァンリンナ理論は、有理形関数の値分布を定量的な評価によって研究する分野である。この理論はR.ネヴァンリンナの研究に始まり多くの寄与がなされてきたが、関数の定義域を一般化する研究はあまり進展していない。一方、ネヴァンリンナ理論は確率論と密接な関係があることを研究代表者は指摘してきた。本研究は、確率論的手法を用いて従来の結果を拡張し、一般的なケーラー多様体上の有理形関数に対するネヴァンリンナ理論の拡張と精密化、熱核を用いた新しいネヴァンリンナ理論の建設、さらにこれらの研究で得た結果・方法を応用して、最近注目されているランダム整関数の値分布の研究などを行うことを目標とする。

## 3. 研究の方法

従来から得られている確率論とネヴァンリンナ理論の関係についてより詳しく考察する。同時に、確率論、微分幾何学、複素解析学などの関連分野について研究分担者らと議論を進める。また得られた結果を国内外で開催される研究集会等で発表し、関連分野の研究者の意見を求める。このために文献の収集、出張旅費、研究発表の準備に使用するコンピューター環境の整備などに研究費を使用する。

また、ランダム解析関数やランダムな正則写像の値分布の研究に対する準備と知見の拡大を目指して、より広い周辺の確率論の研究、すなわち、大偏差原理の理論・ランダム媒質の確率過程・ $p$ -進体上の確率過程などの研究や、一意性定理などのネヴァンリンナ理論のより広い応用についても研究分担者を中心に研究を行う。

## 4. 研究成果

(1) 一般ケーラー多様体上の有理形関数に対するネヴァンリンナ理論。

有理形関数に対するネヴァンリンナ理論は、関数の像と拡張された複素平面上の点との距離の漸近的な近さを測る近接関数、これらの点の原像の大きさを測る個数関数、像の大きさをその面積によって測る特性関数という3つの関数の比較・評価を行うことによ

て、関数の値分布を調べるものである。まず、一般の多様体上においてこれらの関数を古典的なネヴァンリンナ理論の形を保持する形で自然に定式化した。

ネヴァンリンナ理論は第一・第二の主要定理からなる。第一主要定理は、上述した3つの関数の基本的な関係を表す等式である。われわれの自然な定式化の下で一般的なケーラー多様体上の有理形関数についても成立することがわかった。一方、第二主要定理は、拡張された複素平面上の任意の有限個の点に対して、近接関数の和を特性関数によって評価する不等式である。これを用いると有理形関数の除外点の個数を評価することができる。これは、複素ユークリッド空間上の有理形関数に対して成立することはよく知られている。たとえば、古典的な第二主要定理の系として非定数有理形関数の除外点の個数は、高々2個であることがわかる(ピカールの定理)。

ネヴァンリンナの理論と複素ブラウン運動の関係についての考察から、確率解析の基本的なテクニックを用いることができる。これより、一般の完備ケーラー多様体上の有理形関数に対しても、定義域の多様体にのみ依存する剰余項を付け加えることにより、この第二主要定理が成立することを示した。これより、どのような完備ケーラー多様体上の有理形関数であろうとも、像の増大度が十分大きければ、その関数の除外点の個数は高々2個であることがわかる。また、その増大度の閾値は、多様体にのみ依存するもので評価できることもわかる。また、関数の値域が一般のコンパクトリーマン面の場合にも、われわれの方法は適用でき、像の増大度が十分大きければ、その関数の除外点の個数は値域のコンパクトリーマン面のオイラー標数を上限に持つこともわかる。

(2) 複素ユークリッド空間内の部分多様体におけるネヴァンリンナ理論。

複素ユークリッド空間の部分多様体の場合は、その上のブラウン運動とユークリッド空間の(外部)距離関数との合成は局所劣マルチンゲールになるが、一般の場合に比べてより詳しい解析が可能である。この確率過程に対して確率微分方程式の比較定理を適用することにより、部分多様体のディリクレ・グリーン関数の評価を与えた。これを用いることにより、より具体的に上述の剰余項を与えることができることを示した。この結果を用いて、代数的多様体上の有理形関数の除外点の個数の評価をわかりやすい形で与えた。

(3) 熱核を用いたネヴァンリンナ理論。

上述の(1),(2)で得たネヴァンリンナ理論の一般化は、古典的なネヴァンリンナ理論の形

を保持しながら自然に拡張されているので、特性関数や個数関数の意味も理解しやすいのであるが、一般の多様体では、第二主定理に現れる剰余項の評価が難しいという問題点がある。これを解消するために、熱核を用いて、近接関数、個数関数、特性関数を定義しなおし、これらを用いたネヴァンリンナ理論の類似を考えた。

一般に、有理形関数の除外点の個数は定義域のリッチ曲率に関する量によって評価されると予想される。本研究で検討した熱核を用いた方法により、リッチ曲率の負の部分が可積分な場合は、ある増大度を持つ有理形関数に対してこれが正しいことがわかった。

特に、多様体が放物的である場合(その多様体上のブラウン運動が再帰的である場合には、エネルギー有限な有理形関数の除外点の個数の上限は、リッチ曲率の積分値と関数のエネルギーの比と 2(球面のオイラー数)の和によって与えられることを示した。

(4) そのほかの成果.

各研究分担者により、以下のような成果も得た。

田村は、以前調べた吸収壁レヴィ過程の path に関する Wiener Hopf 型の分解を応用して、吸収壁レヴィ過程のグリーン関数の表現を求めた。特に回転不変な安定過程に対しては、より具体的な表現を得た。また、ブラウン媒質中の 1 次元拡散過程の直積が、再帰的になるか、推移的になるかを通常のブラウン媒質及び反射壁ブラウン媒質の場合に調べた。

鈴木は、数直線の負の部分と正の部分に指数の異なる 2 つの自己相似過程によって定義される媒質中を動く拡散過程の長時間挙動について解析を行った。

安田は、アデル環上のマルコフ過程を構成し、 $p$  進単位円板からのプロセスの脱出時刻を用いたリーマンのゼータ関数の表示を与えた。

相原は、複素射影空間上に moving hyperplane を因子として与えた場合に 藤本の一意性定理・有限性定理を拡張した。また、 $m$  次元複素ユークリッド空間上の有限葉解析的分岐被覆空間  $X$  とその上で定義された有理型写像  $f$  の組  $(X, f)$  の族に対し有限性・一意性定理を与えた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

Atsushi Atsuji, Estimates on the number of the omitted values by meromorphic functions, Proceedings of the 1st MSJ-SI, "Probabilistic Approach to Geometry", 掲載決定, 査読有.

Atsushi Atsuji, A second main theorem of Nevanlinna theory for meromorphic functions on complex submanifolds in  $\mathbb{C}^n$ , Potential Analysis, 29, 119-138, 2008, 査読有.

Atsushi Atsuji, A second main theorem of Nevanlinna theory for meromorphic functions on complete Kähler manifolds, Jour. Math. Soc. Japan, 60, 471-490, 2008, 査読有.

Yoshihiro Aihara, Deficiencies of holomorphic curves in complex projective spaces, Complex Analysis and its Applications (eds. Y. Imayoshi et al), OCAMI Studies, Osaka Municipal Univ. Press, 2, 119-124, 2008, 査読有.

Yozo Tamura, On a formula on the potential operators of absorbing Lévy processes in the half space, Stoch. Proc. Appl., 118, 199-212, 2008, 査読有.

Yuki Suzuki, A diffusion process with a random potential consisting of two self-similar processes with different indices, Tokyo Journal of Mathematics, 31, 511-532, 2008, 査読有.

H. Takahashi and Y. Tamura, Recurrence and transience of multi-dimensional diffusion processes in Brownian environment, 統計数理研究所共同研究レポート, 195, 121-125, 2007, 査読無.

Kumi Yasuda, Semi-stable processes on local fields, Tohoku Mathematical Journal, 58, 419-431, 2006, 査読有.

K. Kawazu and Y. Suzuki, Limit theorems for a diffusion process with a one-sided Brownian potential, Jour. Appl. Prob. 43, 997-1012, 2006, 査読有.

T. Saigo and Y. Tamura, Operator semi-selfsimilar processes and their space scaling matrices, Statist. Probab. Letters, 76, 675-681, 2006, 査読有.

[学会発表](計 15件)

相原 義弘 Deficiencies of Holomorphic Curves for Linear Systems, 等角写像・値分布論合同研究集会, 2008年11月30日, 金沢大学.

Y. Aihara, Deficiencies of Holomorphic Curves for Hypersurfaces and Linear Systems, Workshop on Complex Hyperbolic Geometry and Related Topics, 2008年11月19日, Fields Institute, University of Toronto, Canada.

Atsushi Atsushi, Diffusions and Nevanlinna theory, Workshop on Complex Hyperbolic Geometry and Related Topics, 2008年11月17日, Fields institute, University of Toronto, Canada.

厚地 淳, On the number of omitted values of meromorphic functions on recurrent manifolds, 確率論と幾何学, 2008年9月15日, お茶の水女子大学.

Atsushi Atsushi, Estimates on the number of the omitted values of meromorphic functions, The Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute "Probabilistic Approach to Geometry", 2008年8月4日, 芝蘭会館(京都大学)

Y. Aihara, Deficiencies of holomorphic curves in projective algebraic manifolds, The 16th International conference on finite and infinite dimensional complex analysis, 2008年7月29日, Dongguk Univ., Korea.

厚地 淳, 極小部分多様体上のブラウン運動と有理形関数の値分布への応用, 東京確率論セミナー, 2008年7月7日, 東京工業大学

厚地 淳, 有理形関数の値分布と stochastic calculus, 日本数学会 年会, 2008年3月24日, 近畿大学.

厚地 淳, Uniqueness of the ends, Liouville property and related topics on minimal submanifolds in Euclidean spaces, 確率論と幾何学, 2007年10月21日, 熊本大学.

Y. Aihara, Deficiencies of holomorphic curves for hypersurfaces in complex projective spaces, The 15th International conference on finite and infinite dimensional complex analysis, 2007年7月31日, 大阪市立大学.

厚地 淳, Heat operator and Nevanlinna

theory, and its applications. 解析幾何セミナー, 2007年7月26日, 名古屋大学.

Y. Aihara, Defect relation of holomorphic curves and linear systems, Workshop on Holomorphic Mappings, Kobayashi Hyperbolicity and Diophantine Approximation, 2007年7月22日, 東京大学.

厚地 淳, 熱核を用いた Nevanlinna 理論 --- Gauss map への試み, 複素解析幾何セミナー, 2007年5月21日, 東京大学.

Atsushi Atsushi, Nevanlinna theory for meromorphic functions on submanifolds in  $C^n$ , 日中セミナー, 2006年8月23日, 同濟大学(中国・上海).

Y. Aihara, Uniqueness and deficiencies of holomorphic curves, Workshop on Holomorphic Mappings and Value Distribution Theory, 2006年7月22日, 東京大学.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

厚地 淳 (ATSUJI ATSUSHI)  
慶應義塾大学・経済学部・教授  
研究者番号: 00221044

### (2) 研究分担者

#### (3) 連携研究者

田村 要造 (TAMURA YOZO)  
慶應義塾大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 50171905  
(2008年度)  
(2006年度~2007年度) 研究分担者

鈴木 由紀 (SUZUKI YUKI)  
慶應義塾大学・医学部・講師  
研究者番号: 30286645  
(2008年度)  
(2006年度~2007年度) 研究分担者

安田 公美 (YASUDA KUMI)  
慶應義塾大学・商学部・准教授  
研究者番号: 40284484  
(2008年度)  
(2006年度~2007年度) 研究分担者

相原 義弘 (AIHARA YOSHIHIRO)  
沼津工業高等専門学校・教養科・教授  
研究者番号: 60175718  
(2008年度)  
(2006年度~2007年度) 研究分担者