

平成22年3月31日現在

研究種目： 基盤研究 (C)

研究期間： 2006～2009

課題番号： 18540201

研究課題名 (和文) テンソル圏の自由積とその量子解析

研究課題名 (英文) Quantum analysis in tensor categories and their free products

研究代表者

山上 滋 (YAMAGAMI SHIGERU)

茨城大学・理学部・教授

研究者番号： 90175654

研究成果の概要 (和文)：

対称性を記述するための数学的概念に群というものがある。最近の研究により、これでは扱い切れない対称性の存在が明らかになり、群に代わるものとしてテンソル圏の理論が注目されるようになった。

この課題では、このテンソル圏の中でも平面図式による表示が可能な場合に的を絞り、図式の行列表現とテンソル圏の関係について研究を行った。主な成果は、このようにして得られるテンソル圏が単生成元という性質で特徴づけられるという事実である。

研究成果の概要 (英文)：

Traditionally, scientific symmetry is described in terms of a mathematical notion called group. As a consequence of recent studies on symmetry in the field of mathematical physics, we are faced with a new phase of symmetry, which is out of coverage in the ordinary group notion and referred to as quantum symmetry. After closer investigations on the subject, the relevant notion in describing quantum symmetry turned out to be that of tensor category.

In this research project, we focus on planar diagrams and have revealed that their matrix representations are in one-to-one correspondence with singly generated tensor categories.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	720,000	4,020,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：テンソル圏、自由積

1. 研究開始当初の背景

テンソル圏なる概念が、量子対称性を記述する言語としてふさわしいものであることが認識され始め、とくに代数的な観点からの多くの目覚ましい研究が収穫されつつあった。研究の対象としては、量子群、中でも半単純リー群の有限次元表現の作るテンソル圏の量子変形（これは、対応する量子群の表現の作るテンソル圏、すなわち量子群の淡中双対と言うこともできる）については多くの詳しい研究がなされ、ある程度の収束を見せていた。一方で、解析的な立場からの量子群の研究については、作用素環の枠組みでの定式化が整備され、とくに双対性に関わる部分で多くの研究がなされつつあった。量子群の表現は、テンソル圏の重要なクラスを規定するのではあるが、量子群に由来しないテンソル圏についてもいくつかの重要なものが発見され調べられていた。

さて、テンソル圏の解析的な研究としては、部分因子環論との関係で、双加群による実現が可能な場合が主として研究されていたのであるが、テンソル圏自体の構造については、離散的な構造の場合に（量子群の場合であれば、コンパクト量子群に相当する）限定されていた。テンソル圏の構造は、ある意味、非常に豊かであることもあり、離散テンソル圏のさらに狭いクラスである有限テンソル圏に限っても、未だ収束の状況ではない。それは4年前も現在も同様の状況である。

2. 研究の目的

(1) 作用素環における Jones 指数理論は、部分因子環の構造の研究がその出発点であったが、その後、結び目の不変量の発見等を経て、位相的量子場理論・共形場理論・可解格子模型における量子対称性と密接に関連するものであるとの認識に至った。このテーマに関しては、現在も活発に研究が進められているが、その過程で明らかになった注目すべき点は、テンソル圏の概念が対称性を記述する際の基本的な言葉としての役割を担うという事実である。

(2) テンソル圏そのものは、コンパクト群の表現の作るカテゴリー（淡中双対）を抽象化した概念としてグロタンディークの流れを汲む人たちにより60年代より研究されてきたものであるが、量子対称性とのつながりは、80年代後半になされた量子群の発見に負うところが大きい。量子群を代数構造の観点からみた場合、それはホップ代数に他ならない（群は、群環を通じてホップ代数としてとらえられる）のであるが、重要であるのは、そういった形式的な解釈ではなく、行列群の量子変形という具体的な構造の発見にあった。その白鍵も量子対称性の記述という要求

に基づくものであった点は注目に値する。

群の場合と同様、量子群においても、その表現の構造を調べることは極めて重要な問題であり、単純リー群の表現論の量子変形について、詳細な分析がまずなされた。一方で、量子対称性との関係子を細に見ていくと、本質的な情報は表現そのものではなく、表現の相互関係、より正確には表現の作るテンソル圏に含まれていることが明らかになり、表現論を離れた抽象的なテンソル圏の構造自体にも研究の目が向けられるようになってきた。このようにして得られるテンソル圏においては、反傾表現の存在に由来する剛性 (rigidity) が自然に備わっており、抽象的なテンソル圏の枠内でベクトル空間の双対性と類似の構造を記述することが可能である。

この抽象的な剛テンソル圏と淡中双対との関係についてであるが、一見、抽象群と置換群の間関係に似ていて、実は質的な違いが存在する。テンソル圏を量子群の淡中双対と認識するためには、テンソル圏の構成要素をベクトル空間と同定する必要がある。圏の用語を使えば、剛テンソル圏をベクトル空間の作るテンソル圏へ埋め込む「準同型関手」を指定するということである。逆に、「準同型関手」が与えられると、量子群が一意的に復元され、テンソル圏はその淡中双対と同一視される（淡中双対定理）。したがって、剛テンソル圏と量子群（の淡中双対）との違いは、「準同型関手」の存在に集約されるのであるが、テンソル圏においては、「準同型関手」をもつ場合はむしろ例外的であり、実際、量子対称性としてのテンソル圏で、量子群の淡中双対の形にならないものが数多く存在することが知られている。

以上のような状況を踏まえ、量子対称性の研究を、テンソル圏自体の構造解析、テンソル圏の具体的な実現方法、という2つの観点からとらえ直して見たい。群の場合との類似でいえば、前者が群そのものの構造を、後者が群の作用を調べることに相当する。「準同型関手」の有無を調べることは、したがって、後者の範疇に入ることになる。

(3) 実際のテンソル圏の研究は、テンソル圏自体の構造が非常にゆるいこともあり、様々な条件あるいは制限の下に行われている。例えば、組紐可換性とか有限性（有理性）などの性質がそれである。剛性もその一種と考えられる。ここでは、テンソル圏の解析的な構造に注目してみたい。特に、作用素環との関係では、因子環のヒルベルト空間への作用による双加群の作るテンソル圏が重要である。この場合、剛性は Jones 指数が有限であることと同等であることが知られており、この制限を加えた部分テンソル圏を考えることは離散テンソル圏の作用素環への

作用を考えることに相当する。したがって、テンソル圏の解析的研究としては、この離散的な場合がまず問題となるのであるが、離散群との類推で、剛テンソル圏に対する従順性の概念がすでに導入・研究されており、部分因子環における **Popa** の理論に対比する形で、剛テンソル圏の埋め込み定理等が確立している。一方、離散群の中で従順群と対極の位置にあるものに、自由群あるいは自由積で与えられる一連の群があり、これについても作用素環の観点から多くの重要な研究がなされている。とくに、自由確率論との関係は示唆的である。他方、量子群の場合には、**Wang, Banica** 等による普遍量子群の研究があり、その淡中双対と自由確率論との関係が指摘されている。

本研究課題の目的は、この自由積の手法をテンソル圏に導入することにより、これまで見過ごされがちであったテンソル圏自体の解析的研究をさらに推進することにある。

3. 研究の方法

(1) テンソル圏の構造を考える上で基本概念に分岐則代数がある。これは、コンパクト群の表現環と類似のものであり、テンソル積表現がどのような既約表現の直和に分解するかの情報、いわゆる表現の分岐則の一般化になっている。

分岐則代数の一般論、とくにその解析的な側面については、日合と泉による詳しい研究があり、分岐則代数の次元関数による従順性についての様々な特徴付けが得られている。また、分岐則代数の自由積が再び分岐則代数となり、それが自明な場合を除いて従順性をもたないことも分析されている。

一見して、この分岐則代数の自由積をテンソル圏に拡張することは造作もないことのように思えるのであるが、実際に検討を行うと、それが容易ならざるものであることがわかる。困難の所在は、分岐則代数が純粋に組み合わせ論的な情報に基づいており代数学的な手法の一般論が適用できるのに対して、テンソル圏においては、この組み合わせ論的情報以外の部分の記述が錯綜したものになっている点にある。テンソル圏におけるテンソル積の結合律は、ある種の同型を通じて記述され、それを言い換えた形の五角形等式は非線型連立方程式の形となり、解の構造はもとより解の存在すら自明なものではない。一般に解が存在する保証がなく（実際、そのような状況が一般的である）、仮に解が存在する場合でも、その構造を決定することは困難であることが多い。ただ、幸いなことに、自由積に関しては、まさにその自由性が機能して、確かめるべき五角形等式の種類が大幅に減じられることが分かっているので、手作業

でも処理が可能な範囲に収まっている。この部分について、できるだけ整理した形のをまとめて残す。

(2) 部分因子環論の立場から **Bisch** と **Jones** によって導入された **Fuss-Catalan** 代数の解析をテンソル圏の立場から見直す。既に研究済みの **Temperley-Lieb** 代数に対する方法を適用することで、**Fuss-Catalan** 代数に付随したテンソル圏を導入することは容易である。ここで問題とするのは、そうして得られたテンソル圏の半単純性の判定条件であり、含まれるパラメータを使っただけ扱いやすい形に言い換えることである。また、半単純性の下、分岐則代数が (1) で言及した自由積の形になっているか解明する。

(3) (2) で問題にした **Bisch-Jones** カテゴリは、平面内の「色つきひも」のイソトピーによって生成されるテンソル圏とみなせることが予備的考察よりわかっている。より包括的に、1次元図形に関連したテンソル圏の構成が他にも考えられるであろう。例えば、1次元系に向きを入れてそれと両立するように射の合成に制限を付け加えることで新たなテンソル圏が得られるが、他にも位相幾何学的観点から類似の構成法は複数知られているようである。これについても、テンソル圏の観点からの整理統合を図りたい。

4. 研究成果

(1) 圏の概念を形式的に拡張したものに「多重圏」というものがある。これは、圏の構成要素である射の集合として、始対象のラベル部分を多重化する（終対象は一重のままとする）もので、射の可能な合成方法が樹形図状のグラフで記述可能な形で一般化になっているものである。元々は代数的位相幾何における概念であるが、普遍性のある概念である。分岐状態が多様であるため、射の結合法則の内容が多少複雑なものになるのであるが、これが最終的にテンソル圏の構造の一部に転換することが、後ほどの記述で明らかになる。多重圏の例としては、通常の圏における射集合の自明な拡張があるが、それ以外に、テンソル圏に付随して得られる多重圏も重要である。テンソル圏における五角形等式の成立が多重圏における射の結合法則を保証する。この双方の範疇に属するものとして、ベクトル空間の作る多重圏があることも注意しておく。形式的な困難を避けるために、以下で扱う圏は、いわゆる「小圏」になっているものとする。さて、圏の場合と同様、多重圏においても関手と自然変換の概念が定義される。多重圏 C からベクトル空間の作る多重圏への関手を多重圏 C の線型表現と

呼ぶことにしよう。実態は、多数のベクトル空間とそれら相互の線型写像の集まり、というものである。

与えられた多重圏 C の線型表現全体の作る (通常の意味での) 圏を $\text{Rep}(C)$ で表そう。標準的な構成方法であることから、多重圏 A, B の間の関手 F から、 $\text{Rep}(B)$ から $\text{Rep}(A)$ への関手が引き起こされることになるのであるが、これが、双圏 (bicategory) の間の (反) 乗法的関手を与えるというのが、最初の結果である。とくに、元になる多重圏が同値であれば、付随する表現の作る圏も同値となる。

(2) 平面内に長方形をひとつ用意し、その内部に有限個の長方形の箱を外枠と平行かつ互いに重ならないように配置しそれらを相互に曲線で結んだものを平面図式と呼ぶ。一つの箱には複数の曲線が繋げられていてよく、曲線の端点は、外枠の長方形の上下の境界か内部の長方形の上下の境界上にあるものとする。平面図式全体は、内部の長方形を始対象、外枠の長方形を終対象として多重圏 D を構成する。 D における射の合成は、個々の内側の長方形に別の平面図式をはめ込む形で実現される。平面図式として、各長方形につながれた曲線の数がすべて偶数であるものに限定すると D の部分多重圏 E を得る。同様に、各長方形の上下辺からでる曲線の数が同数であるものに限定すると E の部分多重圏 F が得られる。このとき、 E と F が多重圏として同値であることから、 $\text{Rep}(E)$ と $\text{Rep}(F)$ の同値性がわかる。

平面内に配列する図形として長方形の代わりに円を用いて得られる多重圏を C とすると、 C と D がやはり同値であることから、 $\text{Rep}(C)$ と $\text{Rep}(D)$ の同値性がしたがう。

さて、箱型の平面図式からなる多重圏 D はまた、単圏 (monoidal category) の構造 M を次のように導入することが可能である。まず、 M における射の合成は、箱を上下に2つ並べたものを縦の平行線で結んだ平面図式に多重圏としての合成 (はめ込み) を施したものとして定義する。次に、 M における積を、2つの箱を左右に並べ同じく縦の線で外枠と結んだ平面図形へのはめ込みで定める。こうして得られた単圏は、平面図式を180度回転させる操作がピボット構造を定めるという意味で、ピボット圏であることがわかる。このとき、多重圏 D の表現と一つの自己双対象から生成されたピボットテンソル圏との間に1対1の対応がある。これが2つめの結果である。

以上の結果については、様々な派生物が考えられる。例えば、箱を結ぶ曲線に向きを入れて得られる図式の作る多重圏 OD の表現には、一つの対象から生成されるピボットテ

ンソル圏が、曲線に巻きつき数による情報を付加して得られる多重圏 WD の表現には、一つの対象から生成される剛テンソル圏が対応する。

(3) 以上の構成方法で、作用素環の制限 (情報) を加えることは容易で、その場合には、多重圏のユニタリ表現とある種の C^* テンソル圏が対応することになる。とくに、多重圏として、内部的箱を持たない場合の例として、Temperley-Lieb 圏や Bisch-Jones 圏を得ることができ、Bisch-Jones 圏は、Temperley-Lieb 圏の自由積になっていることがわかる。これが、3つ目の結果である。

(4) 最後に、今後の展望につながる研究結果について記しておく。作用素環あるいは関数解析的観点からの研究を進める上で、テンソル圏に付随した特殊な量子状態を解析する必要性に遭遇したため、そのための基礎的な研究として、量子状態間の遷移確率と表現の構成方法における近似性に目を向けるに至った。これについては、現在も進行中のものではあるため詳細は省くが、中間的な成果として、遷移確率における非可換マルチンゲール収束定理とでもいうべき結果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

(1) Shigeru Yamagami, Geometric mean of states and transition amplitudes, *Lett.~Math.~Phys.*, 84(2008), 123—137 (refereed).

(2) Shigeru Yamagami, Notes on operator categories, *J.~Math.~Soc.~Japan*, 59(2007), 541-555 (refereed).

[学会発表] (計1件)

(1) Shigeru Yamagami, Multicategories of planar diagrams and tensor categories, International Conference on Modular Categories and Applications, 2009/3/19--2009/3/22, Indiana University.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山上 滋 (YAMAGAMI Shigeru)

茨城大学・理学部・教授