

平成 22 年 4 月 21 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2009

課題番号：18540202

研究課題名 (和文) 相転移力学の保存則の表わす非線形多重双曲型偏微分方程式系の解の構造と特異摂動極限

研究課題名 (英文) Structures and singular perturbations limits of solutions to the systems of non-strictly hyperbolic nonlinear partial differential equations for the conservation laws in the phase transition dynamics

研究代表者

山崎 満 (YAMAZAKI MITSURU)

国際基督教大学・教養学部・教授

研究者番号：30240732

研究成果の概要 (和文)：(1) 相転移力学の保存則の表わす非線形多重双曲型  $2 \times 2$  保存則系に対して、古典的な波の解である衝撃波とともに非古典的な波の解である過圧縮衝撃波も現れることを示した。(2) 高階の項を含む双曲型単独保存則方程式の特異摂動により解が保存則の解に収束するための十分条件を得た。(3) 相対論的 Euler 方程式に対する真空を含む解を相殺 compact 性を用いて示した。(4) 一般の  $L_p$  空間の枠組みで、真空の周りでの Boltzmann 方程式の解の安定性を示した。

研究成果の概要 (英文)：(1) We show that, for the  $2 \times 2$  nonlinear hyperbolic systems of conservation laws with an umbilic point, there exists classical solutions, shock waves and also non-classical solutions, overcompressive shock waves. (2) We give a sufficient condition for guarantee that the singular perturbation limits of the hyperbolic conservation equation with a higher order terms converge to the solution to the conservation law. (3) We prove the existence of solutions including vacuum to the relativistic Euler equation by using the compensated compactness method. (4) We show the stability of solution to the Boltzmann equation near vacuum in the context of general  $L_p$  spaces.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,500,000	720,000	4,220,000

研究分野：非線形双曲型偏微分方程式系

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：超局所解析, 偏微分方程式, 双曲型保存則系, エントロピー, 流体力学

1. 研究開始当初の背景

(1) 相転移力学の保存則の表わす非線形多

重双曲型保存則系の解の構造について

水と石油と気体の3相からなる流体

の方程式は Darcy の法則によると  $2 \times 2$  の保存則系で記述される Buckley-Leverett モデルとなることが知られている。平面上の有界な閉集合を除いた点でこの保存則は強双曲型であり、従来の理論が適用可能であるが、その有界な閉集合の内部の点ではこの保存則は楕円型となり、数学的な理論は模索中である。簡単のため、この楕円領域が 1 点に退化した場合を考える。つまり、 $2 \times 2$  の保存則系は、原点以外では強双曲型であり、原点では流束の Jacobi 行列がスカラー行列 (2 つの固有値が等しい対角行列) となる場合を考える。このモデルは石油の 2 次回収に生かされるという応用上の重要性から、1980 年代に多くの研究が欧米でなされたが、いずれも数値解析によるものであり、理論的な解の存在は特別な場合にしか知られていなかった。

(2) 双曲型単独保存則方程式の特異摂動について

非線形双曲型単独方程式に高階の項を加え、その高階の項が消滅する時の解の挙動は特異摂動と呼ばれる問題である。3 階の項が消滅する場合しか知られていないので、より高階の項が消滅する場合の研究が残されている。

(3) 相対論的 Euler 方程式について

等温の完全流体を記述する  $2 \times 2$  の双曲型保存則系である Euler 方程式は Euler 座標で記述された方程式系である。これを Lagrange 座標で記述した  $p$ -system はこれまで多く研究されてきたが、真空が特異点となって、真空を含む解を考察することは不可能である。ところが、星の誕生の解明を始め、真空を含む解を考察することは応用上有益である。さらに、星の誕生時には物質の速度場が光速に近い値を取るため、特殊相対論的效果を加味する必要がある。

(4) Boltzmann 方程式の解の安定性について

Boltzmann 方程式の解の安定性については、これまで  $L_2$  空間の枠組みで定常解である Maxwellian に近い解の安定性が研究されてきた。より一般の  $L_p$  空間の枠組みで解の安定性を研究することはその自然な一般化であると同時に、これまでの手法が適用しにくいとも言える。

## 2. 研究の目的

(1) 相転移力学の保存則の表わす非線形多重双曲型保存則系の解の構造について

原点以外では強双曲型であり、原点では流束の Jacobi 行列がスカラー行列となる  $2 \times 2$  の保存則の保存則系の解の構造を明らかにする。特別な場合には、衝撃波や膨張波といった古典的な波の解の他に、過圧縮衝撃波や不足圧縮衝撃波といった非古典的な波の解も知られているので、一般的

な場合に、そのような解の存在を示し、primary bifurcation や secondary bifurcation により、解の構造の変化を調べる。

(2) 双曲型単独保存則方程式の特異摂動について

物理モデルは、高階の項を含むが、非線形双曲型単独方程式では、モデルを理想化し、これらの項を除いている。従って、非線形双曲型単独方程式の正当性を主張するためにもこの問題は重要である。2 階の項、3 階の項はそれぞれ粘性、毛細管現象を意味しているように高階の項には物理的な意味がある。そのため特異摂動極限として得られる解が保存則方程式の解に収束することを示す。

(3) 相対論的 Euler 方程式について

特殊相対論効果を考慮に入れた Euler 方程式である相対論的 Euler 方程式に対する真空を含む解の存在を調べる。

(4) Boltzmann 方程式の解の安定性について

一般の  $L_p$  空間の枠組みで、真空の周りでの解の安定性を調べる。同時に、速度を離散化したモデルである離散 Boltzmann 方程式の解の安定性についても同様の手法が適用できないか調べる。

## 3. 研究の方法

(1) 相転移力学の保存則の表わす非線形多重双曲型保存則系の解の構造について

浅倉史興氏 (大阪電気通信大学工学部・教授) と、解の分岐を含む解の構造および数値解析について共同研究する。磯崎洋氏 (筑波大学数理物質科学研究科・教授) と、スペクトル理論を用いた解の構造について共同研究する。

(2) 双曲型単独保存則方程式の特異摂動について

藤野直樹氏 (東京大学数理科学研究科 COE PostDoctoral 研究生および筑波大学数理物質科学研究科 PostDoctoral 研究生) と共同研究する。

(3) 相対論的 Euler 方程式について

Philippe Gerard LeFloch 氏 (director of research at CNRS & Jacques-Louis Lions Laboratory, Pierre & Marie Curie University (Paris VI)) と共同研究する。

(4) Boltzmann 方程式の解の安定性について

Seung-Yeal HA (professor, Department of Mathematical Sciences, Seoul National University) と共同研究する。

## 4. 研究成果

(1) 相転移力学の保存則の表わす非線形多重双曲型保存則系の解の構造について

対象となる方程式系は Case I-IV に分類されることが知られているが、応用上重要な石油貯蔵流は Case I および II の範疇に入るので、Case I および II を考察する。膨張波解については、本質的には Darboux の研究により解明されているので、衝撃波解について調べる。Case I では、古典的な波の解である衝撃波のみが現れ、Case II では非古典的な波の解である過圧縮衝撃波も現れることを数学的に証明し、論文①⑦⑩⑭に纏めた。

(2) 双曲型単独保存則方程式の特異摂動について

非線形の 2 階および 3 階の項を持つ特異摂動極限により得られる解が保存則の解に収束するための条件を得た (論文⑪⑫)。流束が 2 次関数である Burgers 方程式に限定した場合、高階の線形項を持つ特異摂動極限により得られる解が保存則の解に収束するための条件を得た (論文⑥⑬)。また、流束が一般系であっても、高階の項が 7 階までなら同様の結果が得られた (論文④)。

(3) 相対論的 Euler 方程式について

Darboux 問題に書き換えて、基本解の存在と評価を得る。それをもとにして、相殺 compact 性を用いて、entropy 解の存在を言う。速度場が光速に近づくとき質量場が真空に近づくような解の存在を証明し、論文⑧⑨に纏めた。

(4) Boltzmann 方程式の解の安定性について  
一般の  $L_p$  空間の枠組みで、真空の周りでの Boltzmann 方程式の解の安定性を証明し、論文③⑤に纏めた。また、最新の手法である micro-macro 分解を応用し、一般の  $L_p$  空間の枠組みで、真空の周りでの Boltzmann 方程式の解の安定性を証明し、論文②に纏めた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (14 件)

- ① Fumioki Asakura, Mitsuru Yamazaki, “Viscous shock profiles for  $2 \times 2$  systems of hyperbolic conservation laws with quadratic flux functions”, *Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics*, 京都大学数理解析研究所講究録 1631, 流体と気体の数学解析, 2009, 47-59. (査読無)
- ② Seung-Yeal Ha, Mitsuru Yamazaki, “Lp-stability estimates for the spatially inhomogeneous discrete velocity Boltzmann model”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 11, 2009, 353-364. (査読有)
- ③ Seung-Yeal Ha, Seok-Bae Yun, Mitsuru Yamazaki, “Uniform Lp-stability theory for the spatially inhomogeneous Boltzmann equation near vacuum”, *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 5, 2008, 713-739. (査読有)
- ④ Naoki Fujino, Mitsuru Yamazaki, “Vanishing at Most Seventh-Order Terms of Scalar Conservation Laws”, *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Proceedings of the Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems held in Ecole Normale Supérieure, Lyon, July 17-21, 2006*, 1093-1100, Springer-Verlag, 2008. (査読有)
- ⑤ Seung-Yeal Ha, Seok-Bae Yun, Mitsuru Yamazaki, “Lp-Stability Theory of the Boltzmann Equation Near Vacuum”, *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Proceedings of the Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems held in Ecole Normale Supérieure, Lyon, July 17-21, 2006*, 125-133, Springer-Verlag, 2008. (査読有)
- ⑥ Naoki Fujino, Mitsuru Yamazaki, “Burgers’ type equation with vanishing higher order”, *Commun. Pur. Appl. Anal.*, 6, 2007, 505-520. (査読有)
- ⑦ Fumioki Asakura, Mitsuru Yamazaki, “Viscous shock profile for  $2 \times 2$  systems of hyperbolic conservation laws with an umbilic point”, *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 6, 2009, 483-524. (査読有)
- ⑧ Philippe Gerard LeFloch, Mitsuru Yamazaki, “Entropy solutions of the Euler equations for isothermal relativistic fluids”, *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations*, 1, 2007, 20-37. (査読有)
- ⑨ Philippe Gerard LeFloch, Mitsuru Yamazaki, “Dynamics of isothermal fluids in special relativity”, 京都大学数理解析研究所講究録 1648, 超関数と線型微分方程式 2006・数学史とアルゴリズム, 2009, 117-132. (査読無)
- ⑩ Fumioki Asakura, Mitsuru Yamazaki, “Survey of admissible shock waves for  $2 \times 2$  systems of conservation laws with an umbilic point”, *Asymptotic Analysis and Singularities - Hyperbolic and dispersive PDEs and*

fluid mechanics, Advanced Studies in Pure Mathematics, 47-1, 2007, Mathematical Society of Japan, Kinokuniya, Tokyo, 87-97. (査読有)

- ⑪ Naoki Fujino, Mitsuru Yamazaki, “Hyperbolic conservation laws with nonlinear diffusion and nonlinear dispersion”, Journal of Differential Equations, 228, 2006, 171-190. (査読有)
- ⑫ Naoki Fujino, Mitsuru Yamazaki, “A result on the equation of conservation laws having second and third order terms”, Nonlinear Dispersive Equations, T. Ozawa & Y. Tsutsumi eds., Gakuto International Series, Mathematical Sciences and Applications, 26, 19-34, Gakkotosho, 2006. (査読有)
- ⑬ Naoki Fujino, Mitsuru Yamazaki, “A Convergence Result on the Burgers Equation of Conservation Laws”, Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications I, Tenth International Conference in Osaka, 407-414, Yokohama Publishers, 2006. (査読有)
- ⑭ Fumioki Asakura, Mitsuru Yamazaki, “Existence of Viscous Profiles for Conservation Laws with an Umbilic Point”, Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications I, Tenth International Conference in Osaka, 279-286, Yokohama Publishers, 2006. (査読有)

[学会発表] (計 11 件)

- ① “Introduction to the theory on compensated compactness”, HYKE (HYperbolic and KinEtic) Seminar, 集中講義 (Series of lectures), Department of Mathematical Sciences, Seoul National University, Seoul, Korea, November 2008.
- ② “Lp-stability estimate for the space-inhomogeneous discrete velocity Boltzmann model”, 2008 年度偏微分方程式夏の集中セミナー (Summer Workshop on Partial Differential Equations 2008), 城崎大会議館 (Kinosaki Congress Center), Hyogo, August 2008. (joint work with Seung-Yeal HA, professor of Department of Mathematical Sciences, Seoul National University)
- ③ “Viscous shock profiles for  $2 \times 2$  systems of hyperbolic conservation

laws with quadratic flux functions’’, Workshop on Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics, 京都大学数理解析研究所 (Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University), Kyoto, July 2008. (joint work with Fumioki ASAKURA, professor of Faculty of Engineering, Osaka Electro-Communication University)

- ④ “拡散および分散型保存則の特異摂動問題 (Singular perturbation problem for the conservation laws of diffusive and dispersive types)”, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会 (Mathematical Society of Japan 2007 autumn meeting), 東北大学 (Tohoku University), Miyagi, September, 2007. (joint work with Naoki FUJINO, COE PostDoctoralFellow, Univ. Tokyo & PostDoctoralFellow, Univ. Tsukuba)
- ⑤ “ボルツマン方程式の真空近くの一様 Lp-安定性評価 (Uniform Lp-stability estimate near vacuum for the Boltzmann equation)”, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会 (Mathematical Society of Japan 2007 autumn meeting), 東北大学 (Tohoku University), Miyagi, September, 2007. (joint work with Seung-Yeal HA, professor, and Seok-Bae YUN, student of Department of Mathematical Sciences, Seoul National University)
- ⑥ “特殊相対論における等温流体のダイナミクス (The dynamics of isothermal fluids in special relativity)”, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会 (Mathematical Society of Japan 2007 autumn meeting), 東北大学 (Tohoku University), Miyagi, September, 2007. (joint work with P.G. LeFloch (director of research at CNRS & Univ. Paris VI))
- ⑦ “Solutions containing vacuum for the relativistic Euler equations”, Workshop at Ryukoku University, Recent development of global and micro-local analysis on partial differential equations, 龍谷大学 (Ryukoku University), Siga, September, 2007. (joint work with P.G. LeFloch (director of research at CNRS & Univ. Paris VI))
- ⑧ “ボルツマン方程式の解の一様 Lp-安定性 (Uniform Lp-Stability of Solutions to the Boltzmann Equation)’’, OS2-2 自己相互作用流体の平衡状態とその安定性 (Equilibrium States of

Self-Interacting Fluids and its Stability), 第 56 回理論応用力学講演会 (56th National Congress of Theoretical and Applied Mechanics), 日本学術会議 (Science Council of Japan), Tokyo, March 2007. (joint work with Seung-Yeal HA, professor, and Seok-Bae YUN, student of Department of Mathematical Sciences, Seoul National University)

- ⑨ “Symmetries and Global Solvability of the Isothermal Gas Dynamics Equations’” (according to P.G. LeFloch-V. Shelukhin), 2006 年夏の偏微分方程式シンポジウム (Summer Symposium of Partial Differential Equations 2006), 熱川ハイツ (Atagawa Hitsu), Kamo, Shizuoka, August 2006.
- ⑩ “単独保存則の特異摂動 (Singular perturbation of scalar conservation laws)’”, 2006 年度偏微分方程式夏の集中セミナー (Summer Workshop on Partial Differential Equations 2006), 城崎大会議館 (Kinosaki Congress Center), Hyogo, August 2006.
- ⑪ “Scalar conservation laws with nonlinear diffusion and nonlinear dispersion’”, 11th International Conference on Hyperbolic Problems Theory, Numerics, Applications, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France, July 2006. (joint work with Naoki FUJINO, student of Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山崎 満 (YAMAZAKI MITSURU)  
国際基督教大学・教養学部・教授  
研究者番号 : 30240732

### (2) 研究分担者

磯崎 洋 (ISOZAKI HIROSHI)  
筑波大学・数理物質科学研究科・教授  
研究者番号 : 90111913

(2006~2007 年度)

浅倉 史興 (ASAKURA FUMIOKI)  
大阪電気通信大学・工学部・教授  
研究者番号 : 20140238

(2006~2007 年度)

### (3) 連携研究者

磯崎 洋 (ISOZAKI HIROSHI)  
筑波大学・数理物質科学研究科・教授  
研究者番号 : 90111913

(2008~2009 年度)

浅倉 史興 (ASAKURA FUMIOKI)  
大阪電気通信大学・工学部・教授  
研究者番号 : 20140238

(2008~2009 年度)