様式Ｃ-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年　06 月　11 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：平成１８年度～平成２０年度
課題番号：１８５４０２０４
研究課題名（和文）　離散系・超離散系による総合的連続系分析手法の研究

研究課題名（英文）　Study of methods for analysing continuous systems, relying on discrete and ultra-discrete systems

研究代表者
ウィロックス　ラルフ（WILLOX Ralph）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：２０３６１６１０

研究成果の概要：連続の力学系に対して新しい離散化手法を考案し、その手法の結果で得られた離散系とセルオートマトンの性質をもとの連続系の振る舞いと関連づけることに成功した。特に、提案した離散化手法の妥当性を計るため、様々な自然現象を記述する連続模型の離散化を行ない、それぞれの模型に対応する離散系から、「超離散化」と呼ばれているテクニックによって適切なセルオートマトンを系統的に構成し、これらのセルオートマトンの示す挙動がもとの自然現象に類似しているものであることを示した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
平成１８年度	1,100,000	0	1,100,000
平成１９年度	1,100,000	330,000	1,430,000
平成２０年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	690,000	4,090,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：可積分系、離散系、超離散極限、セルオートマトン

１．研究開始当初の背景

１９９０年代の後半から、離散可積分系の基本的な役割が明らかになり、可積分系の研究やその自然現象への適用に大きな変化が起こってきた。この大きな変化の背景には、可積分系におけるもう一つの新しいパラダイムがある。それは、量子系である可解な格子模型から感染病の広がりを記述する数理モデルまでの様々な応用を持つ「超離散化」という数理学的手法である。超離散化とは、正の値しかとらない解をもつ離散系を、従属変数と方程式に現れるパラメーターの特別な極限によって、加法（＋）と最大値をとる操作（max）という２つの演算子を用いた形で整数上の方程式系、つまり「セルオートマトン」に帰着させる数学的手法である。
近年、離散可積分系から適当な極限操作を通

じて、連続可積分系、または超離散可積分系が両方とも生成できる事実を背景に、離散系は可積分系の世界で最も基本的なものであると思われてきている。離散可積分系が持つ代数的な構造は連続極限や超離散化を通じ、極限から得られた系に改めて特殊な代数的構造をもたらすためである。

なお、正の値しかとらない特殊解以外の解の超離散化は不可能である、つまり、離散系の特殊解の一部だけが超離散極限の対象になるという事実にも関わらず、超離散極限で得られたセルオートマトンはもとの離散系の本質的な振る舞いや性質を捉えていると考えられてきており、超離散系は「もとの離散系の骨子である」とよくいわれている。その背景には「箱玉系」という有名なソリトン・セルオートマトンの影響がある。なぜなら、箱玉系は、離散的ソリトン系に対応する超離散系であり、超離散化対象の１＋１次元離散ソリトン系の超離散極限でソリトン以外の相互作用がすべて消え、結局、可積分性の象徴であるソリトンのみを残す可積分系であるからである。

しかし、離散系の本質的なダイナミックスを捉えている超離散系の概念は、疫学や免疫病理学における非可積分な数理モデルにも適用できることが近年明らかになってきた。そのため、非可積分な数理模型を超離散化によって考察する目的で、研究代表者はパリ第７大学の Basile GRAMMATICOS 氏とパリのエコール・ポリテクニクの Alfred RAMANI 氏との共同研究で、「連続・離散・超離散」の３つの段階を含む総合的な分析スキームを考え始めた。

２．研究の目的

本研究の目的は、離散系と超離散系を用い、連続系の分析を行うための総合的な分析手法を打ち立てることである。具体的には、以下を目的とした。

(1)　与えられた連続系を超離散化可能な正係数の有理写像を用いて、忠実に表現できる系統的な離散化手法を打ち立てる。さらに、コンピュータ・シミュレーションと解析的な手法を用い、その離散的表現の忠実さを定量的に計る指針を与える。
(2)　ここで提案した手法で得られた離散系の超離散化を行い、超離散化の結果で得られるセルオートマトンの性質を考察し、そのセルオートマトンにおける現象をもとの離散系や連続系の振る舞いと関連づける。セルオートマトンに新しい、つまりもとの離散系と関連していない現象がある場合には、その現象の原因を探し出す。

(3)　超離散化可能な離散可積分系とそれらと関連している連続可積分系の解の中で、超離散極限において問題を引き起こす解の特徴を考察し、得られた知識を他の連続系や離散系へ適用する。

３．研究の方法

提案されている「連続・離散・超離散」という総合的分析手法の最初のステップは、当然、与えられた連続モデルの離散化である。ただし、離散化で求められる離散系は正の係数を持つ有理写像に限られているものである。このような有理写像は離散可積分系において非常に優れた性質を持つことはよく知られていたが、同じような写像が非可積分な連続模型のシミュレーションや解析においても有効であり、忠実な記述を与えることに当研究は着目している。例えば、提案されている手法で得られた有理写像は、小さい step size（刻み幅）の場合に連続モデルと同じダイナミックスを示していることばかりでなく、step size を大きくしても、つまり連続極限から離れていっても離散系の振る舞いが質的に保たれていることは大きい利点である。

なお、正係数の有理写像が構成できれば、離散系の超離散化は可能となり、超離散極限で得られるセルオートマトンにはもとの連続モデルの本質的なダイナミックスしか残らないと予想されている。例えば、連続モデルとセルオートマトンの不動点の数、あるいはその不動点の安定性が一致する等。ただし、連続モデルや離散系と大きく異なり、セルオートマトンにおける軌道の吸引点への収束は有限の時間に起きる。すなわち、連続モデルにおける振動の主要な部分はセルオートマトンに残っているが、例えば、微少振動は超離散極限の影響で消滅し、超離散化によるセルオートマトンの持つ特性は連続模型の「骨子」にしぼられていることは本研究において重要な概念である。

しかし、正係数の有理写像を用いた離散化が可能であるとしても、異なる離散化がいくつもある場合も考えられる。その際には、可能な離散系の中で一番妥当なものを選ぶため、もとの連続モデルにおける現象と離散化されたモデルの振る舞いを比較する必要がある。この比較には、力学系を考察するための解析手法やコンピュータ・シミュレーションも用いることにした。

４．研究成果

(1) [A.S. Carstea et al.、 Physica A 364 (2006) 276-286] で発表した連続模型とその系の離散版には limit cycle が一つしか存在しないことにも関わらず、離散系の超離散極限で得られたセルオートマトンには意外にも多数の limit cycle が存在するという不思議な現象を単純化された系で再現し、その現象の原因を解明した。特に、もとの３次元の模型の代わりに同じ現象を示す２次元力学系の離散化・超離散化を行い、超離散極限が引き起こす limit cycle の推移を考察した。離散的な limit cycle が極限において崩壊し、多数の cycle が出るようなパラメーター範囲で、セルオートマトンに現れる cycle の特徴ともとの離散系における cycle との関係を明らかにした。

(2) 離散系の連続極限を考察するために、KP 方程式の離散版である広田・三輪方程式の多項式解を構成し、 適切な従属変数変換を用い、広田・三輪方程式から KP 方程式と同じような lump 解をもつ非線形差分方程式を得た。

(3) 提案した離散化手法の妥当性を調べるため、上記の (1) で研究された力学系以外に、limit cycle を持つ模型をいくつか考察し、今後の研究課題において難問となる現象を見出した。それは、高次元の模型の場合、従属変数のぞれぞれの（離散的な）時間発展の順序が正しくなければ、構成した離散的表現の忠実さが悪化することである。特に、時間遅れの項を持つ連続模型の離散化を行うとき、時間遅れの導入のやり方によって離散系の挙動が連続系から大きくずれることもある。 この問題の原因は従属変数の「staggering」にあることが判明し、 具体的な連続模型の場合、 模型におけるパラメーターの広い範囲で、 もとの連続系と同じ性質を持つ離散系を構成することができた。

(4) 連続の KdV 方程式を含む新しいソリトン系の解を構成した。特に、KdV より大きな自由度をもつソリトンと `pole-solution' の相互作用を記述する解が得られた。このような pole-solution の離散化は本研究分野においては、非常に興味深い問題であると思われている。

(5) 離散パンルヴェ方程式のベックルンド変換から得られる隣接関係式の超離散化を考察し、 q-型 PIII、 PIV と PVI の方程式の場合には、方程式の超離散版とともに、初めて、それぞれの超離散系における隣接関係式を構成した。

(6) 離散 KdV 方程式からソリトン・セルオートマトンを得るために特別な従属変数変換が必要であるが、その変換の一般的な求め方は今まで知られていなかった。 そこで、離散可積分系とソリトン・セルオートマトンを結び付ける変換の系統的な構成法を提案し、離散ソリトン系の超離散化可能な表現を得るための新しい方法を考案した。さらに、この方法を用いると、超離散化可能な Yang-Baxter 写像（即ち Yang-Baxter 方程式の集合論的な解）として解釈できる離散可積分系が得られることが分かった。その結果で、初めて、離散 KP 階層から Yang-Baxter 写像を系統的に構成できる手法が得られた。

(7) 提案した総合的分析手法の妥当性を計るため、比較的に複雑な挙動を示す生態学に適用できる力学系を構成した。それは、「cryptic 振動」と呼ばれている近年発見された新しい現象を記述するための離散的な補食者-被食者系である。(cryptic 振動は、普通の補食者-被食者系における個体数の振動と異なり、被食者の数がほとんど変動しない、それぞれの個体種の間に周期の四半分ではなく、半周期に近いずれがあるという独特な現象である。）特に、この模型の超離散化により、同じ挙動を示すセルオートマトンを構成することに成功した。この結果を発表する論文は現在投稿中である。

(8) D. Levi 氏と R.I. Yamilov 氏に発見された２つの新しい離散可積分系を考察し、標準的な離散 KdV 方程式と離散 mKdV 方程

式と関連つけることができた。さらに、この２つの新しい方程式を直接に結ぶ離散的 Miura 変換を構成した。この結果を発表する論文は J. Phys. A 誌に掲載される予定である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　７件）

① A. Ramani、B. Grammaticos、J. Satsuma、R. Willox、 On two (not so) new integrable partial difference equations、 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical、掲載決定済み、 2009、 査読：有

② S. Kakei、 J.J.C. Nimmo、 R. Willox、Yang-Baxter maps and the discrete KP hierarchy、Glasgow Mathematical Journal、51 A、107-119、2009、 査読：有

③ A. Ramani、B. Grammaticos、R. Willox、Contiguity relations for discrete and ultradiscrete Painlevé equation、 Journal of Nonlinear Mathematical Physics、 15、353-364、 2008、 査読：有

④ A. Ramani、B. Grammaticos、R. Willox、Bilinearisation and solutions of the KdV6 equation、Analysis and Applications、6、401-412、 2008、 査読：有

⑤ A. Ramani、B. Grammaticos、J. Satsuma、R. Willox、Discretisation-induced delays and their role in the dynamics、Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical、41、205204 (11p)、 2008、 査読：有

⑥ B. Grammaticos、A. Ramani、V. Papageorgiou、J. Satsuma、R. Willox、 Constructing lump-like solutions of the Hirota-Miwa equation 、 Journal of Physics A: Mathe-matical and Theoretical 、 40 、12619-12627、 2007、 査読：有

⑦ R. Willox、 A. Ramani、 J. Satsuma、 B. Grammaticos、From limit cycles to periodic orbits through ultradiscretisation、Physica A、385、473-486、2007、査読：有

〔学会発表〕（計　４件）

① R. Willox、Crystal-like structures arising from the dKP hierarchy 、Geometric Aspects of Discrete and Ultra-Discrete Integrable Systems、２００９年３月３０日、University of Glasgow、 スコットランド（連合王国）

② R. Willox 、 Construction of Yang-Baxter maps from the discrete KP hierar- chy 、 Aspects of Quantum Integrability、 ２００８年７月２４日、京都大学基礎物理学研究所

③ R. Willox、Discrete KP、"Box and Ball" systems and Yang-Baxter maps、Nonlinear Waves - Theory and Applications、２００８年６月９日、北京（中国）

④ R. Willox、 Local Darboux transforma-tions and geometric crystals 、Alge-braic aspects of integrable systems、２００７年７月２日、Islay、スコットランド（連合王国）

６．研究組織

(1) 研究代表者

ウィロックス　ラルフ（WILLOX Ralph）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号　２０３６１６１０

(2) 研究分担者

／

(3) 連携研究者

／