

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006-2010

課題番号：18540205

研究課題名（和文） 現象に現れる非等方的曲率流方程式の解析

研究課題名（英文） Analysis on anisotropic curvature flow equations in phenomena

研究代表者 儀我美保

大学院数理科学研究科・研究員

20422397

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形現象

1. 研究計画の概要

結晶成長の界面の運動は、しばしば曲面（あるいは曲線）の非線形拡散型発展方程式で記述される。結晶の界面構造の方向による異方性、つまりある方向に結晶は成長しやすいが、他の方向は成長しにくいという現象を考慮する場合、非等方的曲率流方程式を考える必要がある。本研究では、表面エネルギー密度が特異で必ずしも連続微分可能ではなく、対応するウルフ図形に平らな部分があるような非等方的曲率流方程式を解析する。具体的な研究テーマについては、以下のとおりである。

（1）クリスタライン曲率流方程式の初期値問題

表面エネルギーに対応するウルフ図形が多角形となる場合、動かすべき図形を許容な多角形に制限すると、そのクリスタライン曲率による運動は常微分方程式系で記述できるが、一般的多角形を初期形状とする場合はその常微分方程式の初期値問題は特異となり、いわゆる Briot-Bouquet 型方程式系になり、その解の存在の一般論はあるが、本問題に関しては未知である。（特別な場合は拡大型自己相似解の構成に帰着される。）本研究ではこの方程式系の時間局所解の構成とともに、自己相似解についての英文著書を完成させる。

（2）垂直拡散効果の研究

ショックの現れる一般的なハミルトン・ヤコビ方程式を扱うことを目指し、具体的な方程式の一つである高さによって成長法則の異なる結晶成長のモデルに関するハミルトン・ヤコビ方程式の可解性解析を行う。

（3）非一様場における特異な表面エネルギーによる曲線の運動の解明

特異な非等方的曲率流方程式に外場が加わり、その外場が空間方向に一様でない場合について、滑らかな問題の極限とみなせる自然な解概念を導出する。その上で解の構成を目指す。外力のある曲率流方程式に対しては、その近似方法また、近似の収束の速さも問題となることが多い。様々な近似スキームについて、その収束の速さの評価も目指す。

2. 研究の進捗状況

（1）研究すべき Briot-Bouquet 方程式系については、大学院学生も交えて、様々な解法を試みた。代数的方法ともいえる級数法、代表的解析の方法である逐次近似法を試みたが、いずれも様々な理由でうまくいかなかった。そこで、この方程式系があくまで曲率流方程式といった幾何学的構造に注目し、拡大型自己相似解との比較を試みた。その結果、成長速度がクリスタライン曲率と定数の和に等しいクリスタライン曲率流方程式について、対応する Briot-Bouquet 方程式系の初期値問題が、時間局所解をただ一つ持つことが示せた。なお、自己相似解を扱った英文の著書についても順調に進展し、既に査読も終了し、最終修正の段階となっている。

（2）解の構成のために近似方程式についての様々なアプリオリ評価を確立した。現在、その結果の取りまとめ中である。

（3）等方的曲率流方程式については、連携研究者の石井克幸が外力の付いた平均曲率流方程式をアレン・カーン方程式で近似した際の収束の速さの研究に取り組み、既にその

成果を論文にまとめ、国際学術雑誌である *Advances in Differential Equations* に出版した。なお、この論文では収束の速さの評価の他、その評価が最良であることを例を与えて示している。特異な非等方的曲率流方程式に外場が加わっている場合、その外場が空間的一様な場合は、既に粘性解の枠組みを拡張することにより自然な概念が確立されている。現在のところ、外場が非一様な場合、どのような困難があるかの考察が終り、適切な解概念をどうすれば良いかは、ほぼわかってきている。今後はその解概念に基づき、比較定理の証明を完成させる予定である。まだ論文の形にはなっていないが、数学的には道のりがわかってきた。

3. 現在までの達成度

おおむね順調に進展している。
(理由) 具体的テーマについて、解決への大まかな見通しがついてきたから。

4. 今後の研究の推進方策

本年はこれまでに得られた結果の細部をつめ、論文のかたちをまとめ、国際学術雑誌に投稿する。また英文著書を出版する。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

1. Mi-Ho Giga, Yoshikazu Giga, Hidekazu Hontani, Self-similar expanding solutions in a sector for a crystalline flow, *SIAM J. Math. Anal.*, 37(2006), 1207-1226, 査読有
2. Katsuyuki Ishii, Optimal rate of convergence to the motion by mean curvature with a driving force, *Adv. Differential Equations*, 12(2007), 481-514, 査読有

[学会発表](計 4 件)

1. Hi-Ho Giga, Singular diffusivity its applications, 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2007), 2007年7月19日, スイス・チューリッヒ
2. Katsuyuki Ishii, Optimal rate of convergence of Allen-Cahn equation to motion by mean curvature, Viscosity, metric and control theoretic methods in nonlinear PDEs, 2008年9月3日-5日, Dipartimento di Matematica, Sapienza Universita di Roma, ローマ・イタリア
3. Katsuyuki Ishii, An approximation

scheme for motion by mean curvature, *Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision* 2008, 2008年11月20日-22日, 北海道大学

4. Katsuyuki Ishii, Optimal rate of convergence of Allen-Cahn equation to motion by mean curvature, Workshop on Viscosity Solutions and Related Topics, 2009年1月29日-30日, 埼玉大学, 東京ステーションカレッジ

[図書](計 2 件)

1. 石井克幸, 画像処理と曲率流方程式, 数理学 2008年4月号特集「現代数学はいかに使われているか[解析編]」, サイエンス社(2008)
2. Y. Giga, K. Ishii, S. Koike, T. Ozawa and N. Yamada, International Conference for the 25th Anniversary of Viscosity Solutions, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications, Vol. 30, 学校図書(2008)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

[その他]