

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2009

課題番号：18540206

研究課題名 (和文) 高次元幾何学的変分問題の研究

研究課題名 (英文) A study of higher dimensional geometric variational problems

研究代表者 磯部 健志 (ISOBE TAKESHI)

所属研究機関・部局・職名 東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号 10262255

研究分野：大域解析学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：幾何学的変分問題、ソボレフ空間、コンパクト性、トポロジー

1. 研究計画の概要

位相的に非自明な関数空間上定義された、高次元の幾何学的変分問題の解析的な基礎付けを与える。特に関数空間の完備化とその位相的意味を解明する。

2. 研究の進捗状況

(1) ソボレフクラスの写像に対する特異点の分類：多様体から多様体への写像全体のなす関数空間は、幾何学や物理学において重要な研究対象である。この空間上定義された変分問題 (調和写像、シグマモデルなど) を考える場合、関数空間を適当なソボレフ位相で完備化する必要がある。完備化して得られる写像は、ソボレフクラスの写像で、一般には連続ではない。そのようなクラスの写像に対して、位相的性質と解析的性質の相関関係を調べた。特にソボレフ写像の特異点は、局所的特異点と大域的特異点に分類できることを示し、そのうちの大域的特異点はコホモロジーを用いて記述出来ることを示した。

(2) Faddeev-Skyrme 模型における Hopf ソリトンの最小性の証明：中間子とその相互作用を記述する Faddeev-Skyrme 模型における Hopf ソリトン解の最小性を証明した。Ward は3次元球面において Hopf ソリトン解が安定になるための必要十分条件は、球面の半径が2の平方根以下の場合であろうと予想したが、それを数学的に厳密に証明した。更に、球面の半径が2の平方根よりも小さい場合は強い意味での安定解であることを示した。

(3) ソボレフバンドルの解析とトポロジーの研究：ヤン-ミルズ汎関数を変分解析的に取り扱うには、バンドルおよび接続の空間を

適当なソボレフ位相で完備化する必要がある。3次元以下の低次元の場合には、ソボレフの埋め込み定理から何も新しいことは生じないが、高次元ではこのように完備化してえられる対象は、新しい幾何学的対象を与える。高次元の場合に、この対象 (ソボレフバンドル) の解析的・位相的な基礎付けを与えた。特に、ソボレフバンドルは一般には連続性を欠くが、ある種のトポロジーが定義できることを示し、それがソボレフ位相に関してどのように振る舞うかを調べた。また高次元の変分問題への応用も与えた。

3. 現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している

理由：当初はソボレフ写像の特異点と、ソボレフバンドルの解析的・位相的基礎付けを目標にしていたが、現時点でそれはほぼ達成でき、それ以外に当初予定していなかった、Faddeev-Skyrme 模型に対する Ward 予想を解決できたから。

4. 今後の研究の推進方策

当初の研究目標はほぼ達成できたと思っている。今後はここで得た成果を用いて

(1) 5次元以上の場合に、ヤン-ミルズ汎関数に対して変分法の直接法が適用できるような解析的な枠組みの構築

(2) 高次元ゲージ理論の解析的取り扱い、特にコンパクト化について研究して行きたい。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計 5 件)

① Takeshi Isobe Topological and analytical properties of Sobolev bundles, I: the critical case, *Annals of Global Analysis and Geometry*. (査読有り) 35 巻, 2009 年, 277-337

② Takeshi Isobe A regularity result for a class of degenerate Yang-Mills connections in critical dimensions, *Forum Math.* (査読有り) 20 巻, 2008 年, 1109-1139.

③ Takeshi Isobe On a minimizing property of the Hopf soliton in the Faddeev-Skyrme model, *Rev. Math. Phys.* (査読有り) 20 巻, 2008 年, 765-786.

④ Takeshi Isobe Topology of Sobolev bundles, 数理解析研究所講究録 (査読無し) 1528 巻, 2007 年, 104-116

⑤ Takeshi Isobe On global singularities of Sobolev mappings, *Math. Z.* (査読有り), 252 巻, 2006 年, 691-730.

〔学会発表〕 (計 1 件)

① 磯部 健志 Topology of Sobolev bundles, 変分問題とその周辺, 2006 年 6 月 21 日, 京都大学数理解析研究所