様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月２７日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００６～２００９
課題番号：１８５４０２０６
研究課題名（和文）高次元幾何学的変分問題の研究

研究課題名（英文）A study of higher dimensional geometric variational problems

研究代表者　磯部　健志（ISOBE TAKESHI）
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：１０２６２２５５

研究成果の概要（和文）:
本研究の目的は、位相的に非自明な関数空間上定義された高次元幾何学的変分問題に対して、その関数解析学的な基礎を与える事であった。これに対して得られた成果は１）ソボレフクラスの写像に対して、その特異点の分類を行った。特に大域的特異点の一般論を完成した。２）ソボレフバンドルの位相的性質と解析的性質の相関関係を調べ、高次元のゲージ理論に応用した。３）３次元多様体上のシグマ模型の一般化である、Faddeev-Skyrme 模型に対して、Hopf ソリトン解の強安定性を証明した。４）臨界次元における、退化型 Yang-Mills 方程式の弱解の正則性を証明した。５）境界付き４次元多様体上の Yang-Mills-Dirichlet 問題に対するモース理論を部分的に構築した。６）４次元多様体上の Yang-Mills-Dirac 方程式の弱解の正則性と、エネルギー量子化を証明した。

研究成果の概要（英文）: The purpose of this research is to give a functional analytic foundation for higher dimensional geometric variational problems defined on topologically non-trivial function spaces. The main results we have obtained are 1) We have classified singularities of Sobolev class mappings defined between manifolds. In particular, we have given a general theory of global singularities of Sobolev mappings. 2) We studied interrelations between topological and analytical properties of Sobolev bundles. We applied these results to higher dimensional gauge theory. 3) We proved the strong stability of Hopf soliton for the Faddeev-Skyrme model on the 3-sphere. 4) We proved a regularity of weak solutions for a certain kind of degenerate Yang-Mills connections in critical dimensions. 5) We established a Morse theory for the Yang-Mills-Dirichlet problem on 4-manifolds with boundary. 6) We proved a regularity and energy quantization for the Yang-Mills-Dirac equations defined on 4-manifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	500,000	150,000	650,000
２００７年度	500,000	150,000	650,000
２００８年度	500,000	150,000	650,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総　計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：ソボレフ空間、特異点、調和写像、ヤンーミルズ汎関数、Faddeev-Skyrme 模型、モース理論、Yang-Mills-Dirac 方程式、エネルギー量子化。

１．研究開始当初の背景

（１）３次元以上の調和写像および５次元以上のヤンーミルズ場に代表されるような高次元の幾何学的変分問題を取り扱う場合、その解析的基礎付けは不可欠である。その際、最初に問題になるのは、関数空間の解析的完備化がどのような構造を持つかを決定することであり、その解析的完備化と、問題が本来持つ幾何学的性質との相関関係を解明することが次の問題となる。
３次元以上の調和写像に代表される、写像空間上の変分問題に関しては、このような問題意識での研究は比較的新しく、１９９０頃から始まった。そこでは、主に解析的完備化として得られるソボレフ写像のクラスの決定に焦点が当てられ、現在までで幾つかの有意義な結果が得られている。一方、これらソボレフ写像の幾何学的性質の解明に関しては、それらが多様な特異点を持つ事という困難から、ほとんど体系的な研究はなされていなかった。特に、特異点をある種の近似の障害として見るという視点はなく、この視点で新たに特異点を見直す事ができるのではないか、と言うのが当研究の着想のひとつとなった。
一方、５次元以上のヤンーミルズ場に関連する、バンドル上の変分問題に関しては、関連する関数空間の解析的完備化を解明するという事自体が行われていなかった。問題の重要性と写像空間に対する類似の問題が持つ数学的に豊かな内容からも、この問題は解明すべき研究課題であるという認識にいたった。またこの問題に対しては、関数解析的に解の存在を一般的に与える枠組みは存在しないため、それを与えることも大きな問題であった。

（２）物理学や幾何学の問題から、高次元の変分問題の解を見つける様々な方法が開発されつつあるが、それは未だ可積分系からの摂動論の枠を出ず、一般的な解析的枠組みが与えられていると言うにはほど遠いのが現状である。そこで、それを構築する必要がある。

２．研究の目的

本研究では、調和写像やヤンーミルズ場に代表される幾何学的な変分問題において、特に高次元の場合に、それらを一般的に取り扱うための関数解析的枠組みを構築することを目的とする。そのために、関連する関数空間の完備化の解明とそれの持つ幾何学的性質の相関関係を明らかにする。またそれを用いて、高次元の幾何学的変分問題の解を一般的に与える枠組みを構築し、解の存在を関数解析的変分法の枠組みで証明する。

３．研究の方法

一般に、変分問題を関数解析的に取り扱う場合、その問題を考える適当な関数空間を設定する必要がある。特に幾何学に端を発するような問題を考える場合、位相的に非自明な関数空間上定義された汎関数を考える場合が多々出てくる。解析的には完備である空間を考える必要があるため、一般には汎関数が定義される一番大きなソボレフ空間上で問題を考えるのが自然である。しかし、その一方で、このような解析的には自然な関数空間は、幾何学的に要求される位相的な条件とは一般的には適合しないため、両者を理想的な形で釣り合わせることは、一般には不可能である。従って、一般的な研究の方向性としては、その間の関係を詳しく見て行くことになる。今述べたような問題が本質的に出てくるのは、高次元の幾何学的変分問題においてである。そこで本研究では、まずはじめに、
（１）解析的に自然なソボレフ位相が幾何学的な位相的性質とどのように関連するかを具体的な問題を通して見て行く。当研究では、具体例として、３次元以上の調和写像の問題と５次元以上のヤンーミルズ場の変分問題に関連した関数空間をとりあげる。
（２）その後、解析的性質と位相的な性質とが適合するための「障害」を関数が持つ「特異点」として捉え直し、その特異点の性質を調べる。
（３）それをもとに、高次元の変分問題を取り扱うための、解析的—位相的な新しい枠組みを与え、解の存在を関数解析的変分法の枠組みで与える。

４．研究成果

（１）ソボレフクラスの写像の特異点の分類について。
調和写像に代表されるような、写像空間上で定義された変分問題を考える場合、ソボレフクラスの写像を考えるのが自然である。しかしこのクラスの写像は、高次元においては、位相的な性質と適合しない。これは、ソボレフクラスの写像が許容する特異点が原因である。そこで、この解析的性質と位相的性質の相関関係を調べるべく、ソボレフクラスの写像が持つ特異点の研究を行った。本研究では、特異点をソボレフ写像を滑らかな写像で近似する際の障害ととらえる新しい観点に

立ち、局所的特異点、大域的特異点を系統だって研究した。その結果、局所的特異点は第一障害、大域特異点は第二次以降の障害である事を示し、大域的特異点はソボレフ位相に関する位相不変量をきめる事を示した。更に、大域的特異点はコホモロジーで記述できる事を示し、大域的特異点が最初に出てくる４次元の場合に、それの具体的な記述を、多様体の基本的な位相不変量と写像の位相不変量を用いて与えた。

（２）ソボレフバンドルの理論について。
バンドル上の高次元の変分問題を関数解析的に取り扱うには、バンドルを適当な位相で完備化した、一般化されたバンドルの理論が必要になる。そのひとつとして、ソボレフクラスのバンドルを考え、それを系統だって研究した。ソボレフバンドルとは、リー群に値を取るソボレフ関数がなす前層を係数とする１次のチェックコホモロジー群である。これに関して、ソボレフ指数が臨界次数の場合、ソボレフクラスのバンドルは滑らかなクラスのバンドルとカテゴリー的に同値である事を示した。これは Uhlenbeck が１９８０年代に提出していた問題に肯定的な解を与えたことになる。また、バンドルがヤンーミルズエネルギーが有界であるような接続を持つ場合に、バンドルのソボレフの弱位相に関する完備化を求め、それを用いて、共形変換で不変な変分問題の解の存在、変分問題の位相的コンパクト性、およびエネルギー量子化の問題等を解いた。
臨界次元を超えた、高次元の場合は、本質的な特異点が存在するために、臨界次元で成り立つような事柄は、一般には期待できない。しかしこの場合にも、ソボレフ位相に適合した位相不変量が定義可能である事を示し、それを用いて、ヤンーミルズエネルギーのスペクトルの特徴付けを与えた。また、ソボレフクラスのバンドルおよびその上のソボレフクラスの接続にたいして、古典的なチャーンーヴェイユ理論を拡張し、ある次数においては、曲率の不変多項式は位相不変量をきめる事を示した。またバンドルがある次元の特異点を持つ場合にも理論を拡張し、その応用として、高次元のヤンーミルズ場のモデュライ空間のコンパクト性に関する結果をえた。

（３）Faddeev-Skyrme 模型におけるホップソリトン解の最小性の証明について。
Faddeev-Skyrme 模型は、シグマモデルや他の場の理論とは異なり、ノット状の安定解を与えることが期待されている１＋３次元の場の理論である。これに関して、１９９９年に Ward は３次元球面上における Hopf 解は、球面の半径が２の平方根より大きい場合に限り不安定であろうという予想を与えた。この条件のもとでの解の不安定性は Ward 自身が証明していたが、逆にこの場合に限るかという問題は未解決のままで、Ward 予想として知られていた。本研究では、これより少し強い主張の数学的に厳密な証明、すなわち、球面の半径が２の平方根以下の場合、Hopf 解は安定で、２の平方根より真に小さい場合、強安定である事を示した。さらに Hopf ソリトンの近傍における最小エネルギー解のなすモデュライ空間の構造を完全に決定した。

（４）退化したヤンーミルズ方程式の弱解の臨界次元における正則性について。
幾何学に由来する偏微分方程式には、臨界次元という固有の次元が存在する。それは微分方程式がある種の幾何学的変換で不変である唯一の次元であり、方程式は、この次元では他の次元では見られない多くの構造をもつ。臨界次元における幾何学的偏微分方程式の弱解は、実は滑らかな古典界となる事が一般的に期待されているようである。曲率の共形変換の問題に由来する山辺方程式に対してはこれが正しいことは１９６０年代には既に知られていた。一方、調和写像の場合、２次元以外では、一般的な形ではこの問題は未解決である。
当研究では、この事を（５次元以上では退化した）ヤンーミルズ方程式の場合に証明した。すなわち、エネルギー有限なヤンーミルズ方程式の弱解は、臨界次元以下では古典解となることを証明した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

(1) Takeshi Isobe: Topological and analytical properties of Sobolev bundles. I. The critical case. Ann. Global Anal. Geom. 35, 277-337 (2009). 査読有り。

(2) Takeshi Isobe: A regularity result for a class of degenerate Yang-Mills connections in critical dimensions. Forum Math. 20, 1109-1139 (2008). 査読有り。

(3) Takeshi Isobe: On a minimizing property of the Hopf soliton in the Faddeev-Skyrme model. Rev. Math. Phy. 20, 765-786 (2008). 査読有り。

(4) Takeshi Isobe: Topology of Sobolev bundles. 数理解析研究所講究録 1528, 104-116 (2007). 査読無し

(5) Takeshi Isobe: On global singularities of Sobolev mappings. Math. Z. 252, 691-730 (2006). 査読有り。

〔学会発表〕(計１件)
磯部健志：Topology of Sobolev bundles.　変分問題とその周辺。2006 年 6 月 20 日ー6 月 22 日。京都大学数理解析研究所。

６．研究組織
(1)研究代表者
　磯部　健志 (ISOBE TAKESHI)
　東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授
　研究者番号：１０２６２２５５

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし