様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2006～2008
課題番号：１８５４０２０７
研究課題名（和文）　水面波の長波近以の数学解析

研究課題名（英文）　Mathematical analysis of long wave approximations for water waves

研究代表者
井口　達雄（IGUCHI TATSUO）
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：20294879

研究成果の概要：
水の波の基礎方程式系は，長波近似を行うことにより様々な分散型方程式や浅水波方程式で近似される．本研究では，２層流体の内部波を記述する Benjamin-Ono 方程式，および浅水波方程式による基礎方程式系の近似に対して，基礎方程式系の解と近似方程式の解との誤差評価を導出することにより，それら近似の数学的に厳密な正当性を与えた．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,400,000	0	1,400,000
2007 年度	900,000	270,000	1,170,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	570,000	3,870,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：水面波，水の波，長波近似，KdV 方程式，Benjamin-Ono 方程式，浅水波方程式

１．研究開始当初の背景

河川を流れる水や大海原を満たしている海水と大気が接する水面の運動は「水の波」あるいは「水面波」と呼ばれ，物理的および工学的観点からの重要性により古くから研究の対象となって来た．その水の波は，重力場の下での非圧縮かつ非粘性流体の渦なし流に対する自由境界問題として偏微分方程式系によって数学的に定式化されるが，その解析は易しくなく，今日でもなお研究者の興味を引いてやまない．その解析の困難な点は，主として以下の 3 点に起因している．

① 基礎方程式系・境界条件の非線形性
② 境界の形状が未知であること
③ エネルギー散逸の構造を持たないこと

研究代表者はこれまで，その水の波の基礎方程式系に対する初期値問題の適切性(Well-posedness) およびその解の漸近的な振る舞いについて詳しく調べてきた．

水の波の歴史は古く，Korteweg & de Vries (1895)が導出した有名な KdV 方程式も水の波の基礎方程式系から出発して導出されたもので，ある長波近似の極限方程式として理解される．ところが，その基礎方程式系に対する初期値問題の適切性が調べられたのは比較的最近である．2 次元空間の場合，水深が無限であり，かつ初期値は十分小さいという条件はつくものの，その初期値問題の適切性

がNalimov (1974)によって証明された．これは，この方面の研究の先駆的な結果である．その後，ほぼ平らな水底がある場合，そして水面上に表面張力が働いている場合の適切性が Yosihara (1982, 1983)によって証明された．

これらの結果を基礎として，研究代表者は，水面の上方にある流体の運動も考慮に入れた水の波の２層問題（内部波），渦の影響を考慮した場合の水の波，および地球を取り巻く海の運動を空間２次元化した円環状領域での循環流における水の波の初期値問題の適切性を調べた．また，大きな初期値に対する適切性については，水面上に表面張力が働いていない場合には Wu (1997)により，表面張力が働いている場合には研究代表者により肯定的に解決された．未解決問題として知られていた３次元空間の場合の初期値問題の適切性については，表面張力が働いていない場合に限られるが，水深が無限の場合には Wu (1999)により，滑らかな水底がある場合には Lannes (2005)により解決された．以上の結果は，どれも時間局所的な適切性しか扱っておらず，水の波の時間大域的な挙動を厳密に調べた結果は研究代表者の部分的な結果しかない．

一方，物理学者および工学者は水の波の基礎方程式系を適当な方法で近似し，その近似方程式の解の挙動を調べることによって水の波の挙動を理解してきた．その最も簡単な方法が線形近似である．その線形方程式の分散関係を調べることによりある程度の情報は得られるが，非線形効果によって生じる現象，例えば，波が砕けることや孤立波解の存在等は説明出来ない．そこで非線形効果も取り入れた近似として，長波近似がある．長波近似の代表例としては，上で述べたKdV方程式がある．Scott Russell (1845)によって観察された水面上を伝わる孤立波の存在は，このKdV方程式が孤立波解を持つことから理論的に保障されている．

さて，水の波の基礎方程式系を無次元化すると，δ＝（水深）／（波長）およびε＝（振幅）／（水深）という２つの無次元パラメーターが現れる．ここでは，$\delta\to0$ の極限を長波近似と呼ぶことにする．さらに，表面張力を考慮する場合には Bond 数と呼ばれる無次元パラメーターμも方程式系に現れる．これら３つの無次元パラメーターの間の関係により，少なくとも以下の４つの長波近似が考えられる：

① 浅水波極限：$\varepsilon=1$， $\delta\to0$
② Benjamin-Ono極限：$\varepsilon=\delta\to0$
③ KdV極限：$\mu\neq1/3$， $\varepsilon=\delta^2\to0$
④ Kawahara極限：$\mu=1/3$， $\varepsilon=\delta^4\to0$

これらの長波近似における水の波の基礎方程式系の極限方程式として，それぞれ，浅水波方程式,Benjamin-Ono方程式,KdV方程式,Kawahara方程式が導かれる．この他にも，振幅変調波を対象とした非線形Schrödinger方程式や Davey-Stewartson 方程式系による近似もある．このように，水の波の基礎方程式系は浅水波方程式および様々な分散型方程式の源泉になっている．

ここで，上記の近似は本当に正しいのか？すなわち，近似方程式の解は水の波の基礎方程式系の解を近似しているのかどうか？さらには，その近似の精度はどの位であり，近似の限界はどこまでか？という素朴な疑問が生じる．物理学者や工学者は長波近似を行う際，暗黙のうちに，水の波の基礎方程式系に対する初期値問題の解が比較的長時間（$O(\varepsilon^{-1})$の時間区間）存在し，しかもその解および解の導関数がパラメーターに関して一様に有界である，ということを仮定している．しかしながら，長波近似は特異摂動問題であり，数学的に見るとそれは決して自明なことではない．

浅水波近似の数学的に厳密な正当性は，抽象的Cauchy-Kowalevskiの定理を用いる解析関数の枠組みにおいて，周期境界条件の下Ovjannikov (1974)により，また一般のCauchy 問題については Kano & Nishida (1979)により与えられた．しかしながら，初期値問題として自然なSobolev空間における正当性は未解決であった．

KdV 近似の数学的に厳密な正当性は，水面波が一方向にのみ運動するという制限の下Craig (1985)により，また一般の場合にはSchneider & Wayne (2000)により与えられた．しかしながら，Schneider & Wayne の結果はかなり弱い形で与えられており，比較的長時間における解の存在は証明しているものの，解の導関数のパラメーターに関する一様有界性は保障していない．それゆえ、波の一方向性を仮定したとしても，彼らの結果からはCraig の結果を得ることは出来ない．またSchneider & Wayne (2002)は今述べたような弱い形で Kawahara 近似の数学的に厳密な正当性も与えた．研究代表者は，Craig のアイデアをより精密にすることにより，Schneider & Wayne の KdV 近似およびKawahara 近似の正当性の結果を満足できる形に改良すると同時に，水底に凹凸がある場合，その凹凸が KdV 近似および Kawahara 近似に与える影響を調べていた．しかしながら，２層流体の内部波を記述する Benjamin-Ono方程式による近似の正当性は未解決であった．

２．研究の目的

「研究開始当初の背景」欄において記したように，水の波の基礎方程式系の長波近似による近似方程式の解が元の基礎方程式系の

解を近似しているのかどうか？という素朴な疑問に対して数学的に厳密な回答を与えることが本研究の目的である．より詳しく述べると，物理学者や工学者が行う形式的な近似は「方程式系の近似」を指し，その形式的な近似に対して数学的に厳密な正当性を与えるということは「解の近似」に相当している．長波近似は特異極限に当たり，方程式系の近似が直ちに解の近似を導く訳ではない．特に，比較的長時間における解の存在や，その解の一様有界性を示すことが重要な鍵となるが，それらは簡単に示されない．

KdV 極限や Kawahara 極限については，既にほぼ満足できる形の結果が得られている．未解決であった Sobolev 空間における浅水波近似および Benjamin-Ono 近似の正当性を与えることが本研究の目的である．

３．研究の方法

(1) 関連する文献を精読することにより水の波の基礎方程式系の特性をよく理解し，問題の本質を見極めると同時に，問題点を克服するための新しい計算手法や新たな視点を見い出すことに努めた．

(2) 文献の内容が完全に理解できなかったり，文章中には陽に書かれていない隠れたアイデアが掴めないような場合，その著者を招聘するか研究代表者が当該研究機関を訪問して知識の提供を求め，問題のより良い理解に努めた．

(3) 関連する研究者が多数参加する研究集会に参加したり，研究代表者が主催している慶應義塾大学理工学部での『非線形解析セミナー』に関連研究者を招聘し，講演をして頂いた．それらを通して最新の研究成果に触れたり，研究討論を行って新たな視点を模索した．

(4) 新しい計算手法や新たな視点を基にして，研究代表者，研究分担者，連携研究者が独立に計算を行った．その計算は紙面上での手計算が中心であった．そして，お互いに密に研究連絡を取り合うことによってアイデアを共有したり研究の進展状況を把握したりして研究の進展に努めた．

４．研究成果

(1) 水面の上方にある流体の運動も考慮に入れた２層流体に対する長波近似を数学的に解析し，代表的な分散型偏微分方程式の一つである Benjamin-Ono 方程式の数学的に厳密な正当性を与えた．より正確には，$\varepsilon=\delta\to 0$ という極限において，水面波の２層問題の解が $O(\varepsilon^{-1})$ という比較的長い時間スケールで存在し，その解が Benjamin-Ono 方程式の解により $O(\varepsilon)$ という精度で近似されることを証明した．２層水面波の初期値問題の可解性は既に研究代表者によって得られているので，証明の鍵になったのは $O(\varepsilon^{-1})$ という比較的長い時間スケールでの解の a priori 評価を得ることであった．Cauchy-Riemann 方程式系に対する Dirichlet-to-Dirichlet 写像の漸近展開を Craig のアイデアをより精密にすることにより導出し，これとエネルギー法を組み合わせることにより，その a priori 評価を得ることに成功した．

(2) Nalimov の先駆的な結果から始まるこれまでの研究により，水の波の基礎方程式系に対する初期値問題は，水面上の物理量のみに対する閉じた方程式系に同値変形され，しかもその変形によって初めてその方程式の主要部の具体的な形が現れることが分かっていた．それを行うためには Laplace 方程式に対する Dirichlet-to-Neumann 写像，あるいは Cauchy-Riemann 方程式系に対する Dirichlet-to-Dirichlet 写像等を用いなければならない．
これまでの研究では，Laplace 方程式に対する Dirichlet-to-Neumann 写像の性質は特異積分作用素や擬微分作用素の理論を用いて調べられて来た．本研究ではその方針を刷新し，適当な微分同型写像を用いて複雑な領域上の問題を簡単な領域上の問題に変換し，Green の公式を適用するだけで浅水波近似の正当性の証明に必要な Dirichlet-to-Neumann 写像の性質を導き出した．そして先行結果における計算よりもはるかに初等的で簡単な計算により，解の δ に関して一様な評価が得られた．その結果として，これまで未解決であった Sobolev 空間における水の波の浅水波近似の数学的に厳密な正当性を与えることに成功した．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１０件）

① <u>Tatsuo Iguchi</u>, A shallow water approximation for water waves, J. Math. Kyoto Univ., 査読有, Vol. 49, 2009, 13-55.

② Kenta Ohi, <u>Tatsuo Iguchi</u>, A two-phase problem for capillary-gravity waves and the Benjamin-Ono equation, Discrete Contin. Dyn. Syst., 査読有, Vol. 23, 2009, 1205-1240.

③ <u>Yoshiyuki, Kagei</u>, Takumi Nukumizu, Asymptotic behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes

equation in a cylindrical domain, Osaka J. Math., 査読有, Vol. 45, 2008, 987-1026.
④ Yoshiyuki Kagei, Asymptotic behavior of the semigroup associated with the linearized compressible Navier-Stokes equation in an infinite layer, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読有, Vol. 43, 2007, 763-794.
⑤ Yoshiyuki Kagei, Resolvent estimates for the linearized compressible Navier-Stokes equation in an infinite layer, Funkcial. Ekvac., 査読有, Vol. 50, 2007, 287-337.
⑥ Tatsuo Iguchi, A long wave approximation for capillary-gravity waves and the Kawahara equation, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.), 査読有, Vol. 2, 2007, 179-220.
⑦ Tatsuo Iguchi, A long wave approximation for capillary-gravity waves and an effect of the bottom, Comm. Partial Differential Equations, 査読有, Vol. 32, 2007, 37-85.
⑧ Yoshiyuki Kagei, Shuichi Kawashima, Stability of planar stationary solutions to the compressible Navier-Stokes equation on the half space, Comm. Math. Phys., 査読有, Vol. 266, 2006, 401-430.
⑨ Yoshiyuki Kagei, Shuichi Kawashima, Local solvability of an initial boundary value problem for a quasilinear hyperbolic-parabolic system, J. Hyperbolic Differ. Equ., 査読有, Vol. 3, 2006, 195-232.
⑩ Tatsuo Iguchi, A mathematical justification of the forced Korteweg-de Vries equation for capillary-gravity waves, Kyushu J. Math., 査読有, Vol. 60, 2006, 267-303.

〔学会発表〕(計１１件)
① 井口 達雄, Shallow water approximations for water waves, First China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, 2008年11月11日, Academy of Mathematics and System Sciences, Academia Sinica, Beijing, China.
② 井口 達雄, Shallow water approximations for water waves, 研究集会「流体と気体の数学解析」, 2008年7月10日, 京都大学数理解析研究所.
③ 井口 達雄, Shallow water approximations for water waves, 7th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2008年5月21日, Department of Mathematics at the University of Texas at Arlington, USA.
④ 井口 達雄, Shallow water approximations for water waves, Nonlinear Wave and Dispersive Equations, 2008年1月22日, 京都大学大学院理学研究科.
⑤ 井口 達雄, A shallow water approximation for water waves, SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations, 2007年12月10日, Hilton Phoenix East/Mesa, Mesa, Arizona, USA.
⑥ 井口 達雄, Shallow water approximations for water waves, Workshop on Destruction: Mathematical Modeling of Tsunami Waves and Cracks Propagation, 2007年11月21日, 慶應義塾大学.
⑦ 井口 達雄, A shallow water approximation for water waves, Workshop "Modeling of nonlinear dispersive long waves", 2007年5月22日, Wolfgang Pauli Institute, Vienna, Austria.
⑧ 井口 達雄, A shallow water approximation for water waves, 第２４回九州における偏微分方程式研究集会, 2007年1月31日, 九州大学国際ホール.
⑨ 井口 達雄, A shallow water approximation for water waves, Workshop on Mathematical Analysis on Nonlinear Phenomena, 2006年12月19日, 慶應義塾大学.
⑩ 井口 達雄, A shallow water approximation for water waves, 偏微分方程式の諸問題, 2006年10月29日, 東海大学.
⑪ 井口 達雄, A shallow water approximation for water waves, 第二回流体と保存則の研究集会, 2006年10月17日, 東京工業大学.

〔その他〕
Ｗｅｂページ:
http://www.math.keio.ac.jp/~iguchi/

６．研究組織
(1)研究代表者
井口　達雄 (IGUCHI TATSUO)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号:20294879

(2)研究分担者
石川　史郎 (ISHIKAWA SHIRO)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：10051913
高山　正宏 (TAKAYAMA MASAHIRO)
慶應義塾大学・理工学部・助教
研究者番号：90338252
(3)連携研究者
隠居　良行 (KAGEI YOSHIYUKI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：80243913