

様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目： 基盤研究(C)

研究期間： 2006～2008

課題番号： 18540210

研究課題名（和文） 場の理論から得られる可積分系の研究と応用

研究課題名（英文） Study of integrable systems coming from field theories and their applications

研究代表者

武部 尚志 (TAKEBE TAKASHI)

お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・准教授

研究者番号： 60240727

研究成果の概要：

無分散型と呼ばれる可積分な偏微分方程式系の解の構成方法として、本質的な独立変数の個数を制限する「簡約」という操作について、種々の無分散系（特に多成分系）を対象に研究した。また、統計力学や確率論の方面からも注目されている Stochastic Loewner Evolution (SLE) を、高い対称性（アフィン・リー代数の対称性）を持つ場合に拡張する事を試みた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	660,000	4,060,000

研究分野： 数理物理学（可積分系）

科研費の分科・細目： 数学・大域解析学

キーワード： 可積分系、無分散系、簡約、Loewner 方程式、SLE, アフィン・リー代数、

1. 研究開始当初の背景

(1) 研究開始当時、統計力学におけるパーコレーションの問題や境界つき共形場理論の研究に関連して stochastic Loewner evolution (SLE) と呼ばれる方程式が注目され始めていた。これは二十世紀初頭に単葉関数論の中で導入された Loewner 方程式（ある種の領域の 1-パラメータ族について Riemann の写像関数が満たすパラメータ

に関する微分方程式）を確率微分方程式に直したもので、2000 年頃から（日本以外では）盛んに研究されていた。また 2 次元重力の行列模型との関連や WZW 模型など種々の共形場理論に対応する同様の理論も研究されていた。

一方、やはり 2000 年頃に、滑らかな境界を持つ領域についての Riemann の写像関数が無分散戸田格子ヒエラルヒーと呼ばれる可積分系の解になっている事が発見された（独

立変数は領域の形を決めるパラメーター)。更に、Loewner 方程式の解からいくつかの無分散系の解を構成する方法も見つかっていた。

これら二つの事実の複素関数論との関係や 2 次元重力との関係（無分散系は 1990 年代には行列模型の漸近極限との関連で注目された）といった間接的な状況証拠から、これらにはもっと直接的な結びつきがあると期待されたが、はっきりした定式化すら存在しなかった。

(2) 1990 年前後、Polyakov や Zograf, Takhtajan らは、二次元重力の理論から自然に Teichmueller 空間の上の計量が導入されることを示している。研究開始の頃には、この方向とは別に、二次元重力が行列模型の観点から無分散可積分系と関係することが分かっていた。さらに、Polyakov の理論を再度検討してみると、そこに当時本研究者が研究していた Gaudin 模型と呼ばれる可解格子模型の「変数分離方程式」が現れている事が分かった。

2. 研究の目的

本研究では、以上の流れを踏まえ、

- (1) 無分散可積分系と Loewner 方程式の関係をさらに探求して「無分散系の stochastization」を一つの目標とした。これは SLE の自然な拡張を与えるはずで、無分散ではない元の KP ヒエラルヒーや戸田格子ヒエラルヒーとの関係も見付かる可能性が期待された。
- (2) もう一方の目標は Teichmueller 空間の Zograf-Takhtajan 計量などを無分散系の観点から見直し、また Gaudin 模型との関連から アフィン・リー代数の表現論を駆使して考察する事であった。

3. 研究の方法

「目標」で述べた最初の問題については、具体的には無分散系側から Riemann の写像定理との関係を再考する、という方向と、逆に SLE 側から共形場理論の方法論を使っ

て可積分系へとアプローチする、という両面作戦を取った。最初の方向については「簡約」による解の構成のメカニズムを解明し、それを種々の無分散系に適用する事を試みた。逆に SLE からのアプローチは、共形場理論として表現論を使う方法で扱いやすいように高い対称性を持つ SLE (特にアフィン・リー代数の対称性を持つもの) の構成を目指した。

本研究期間中には「目標」で定めた二つ目の問題 (Teichmueller 空間と可積分系の関係) については情報収集のみを行った。

4. 研究成果

無分散系の「簡約」については次のように十分な知見が得られた。

・かなりアドホックなやり方で証明されていた「簡約」による解の構成を、無分散広田方程式という無分散系の基礎方程式の一つから自然に証明する事ができた。これにより、種々の系への拡張が容易に行えるようになった。

・実際、多成分 KP ヒエラルヒーの無分散化が、Krichever によって導入された universal Whitham ヒエラルヒーになる事が無分散広田方程式を使って証明でき、そこから (かなり長い計算が必要だが原理的には明快に) 簡約解の構成ができた。この universal Whitham ヒエラルヒーの簡約解の構成では、予想に反して一成分系の場合とまったく同じ形の Loewner 方程式が補助方程式として現れたのは非常に興味深い現象である。

・Flag 多様体上の主束を解の moduli 空間とする coupled modified KP ヒエラルヒーとその無分散極限を構成した。これについての「簡約」については現在考察中である。

SLE の対称性をアフィン・リー代数まで広げようという試みについてはシカゴ大学の P. Wiegmann 氏らと議論したが、技術的には「アフィン・リー代数の highest weight 表現で、highest weight から level 2 だけ下がった所に singular vector を持つようなものが存在するか」という表現論的な問題に行き着くことが分かった。このような問題アフィン・リー代数の表現の singular

vector についての一般論には、表現論の専門家にとってもまだ未解決の問題が多い。上の問題が片付けば SLE を作る処方箋は考えられが、研究期間内ではこの表現論の問題を解明することはできなかった。

ちょうど京都大学を訪問中だった表現論の大家 B. Feigin 氏とも議論した所、必要な性質を持つ表現を構成できる可能性のある方法についての示唆を得ることができ、現在その線に沿って考察中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① T. Takebe, L.-P. Teo and A. Zabrodin, Loewner equations and dispersionless hierarchies, Journal of Physics A, 39 (2006) 11479-11501. 査読有
- ② T. Takebe and L.-P. Teo, Coupled modified KP hierarchy and its dispersionless limit, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (電子ジャーナル) 2 (2006), 072, 30 pages, 査読有
- ③ K. Takasaki and T. Takebe, Universal Whitham hierarchy, dispersionless Hirota equations and multi-component KP hierarchy, Physica D235 (2007), 109-125, 査読有
- ④ K. Takasaki and T. Takebe, Loewner equations, Hirota equations and reductions of universal Whitham hierarchy, Journal of Physics A 41 (2008), 475206 (27pp), 査読有

[学会発表] (計 3 件)

- ① 武部尚志、無分散可積分系と関数論、研究会「可積分系数理の眺望」、2006年 8 月 23 日、京都大学数理解析研究所

- ② Takashi Takebe, Loewner equations and dispersionless hierarchies, Conference on Integrable Systems in Applied Mathematics, September 11 (2006), Colmenarejo Campus of the Carlos III University (Madrid, Spain),
- ③ Takashi Takebe, Dispersionless Hirota Equations and Reduction of Integrable Hierarchies, Workshop “Laplacian Growth and Related Topics”, Centre de Recherche Mathematiques, Montreal (Canada), August 21 (2008).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

武部 尚志 (TAKEBE TAKASHI)

お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・准教授

研究者番号: 60240727

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし