

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2009

課題番号：18540214

研究課題名（和文）

戸田型非自励離散可積分系の代数構造の研究と工学への応用

研究課題名（英文）

Research on the algebraic structure of the Toda type non-autonomous discrete integrable systems and its applications

研究代表者

辻本 諭 (TSUJIMOTO SATOSHI)

京都大学・大学院情報学研究科・准教授

研究者番号：60287977

研究成果の概要（和文）：

直交多項式の理論と廣田のタウ関数の理論を用いることで、戸田方程式および関連する離散可積分系に関する解析をすすめた。特に「非自励離散可積分系」に着目することで、その特殊解を中心とした理論の構築した。また、一般化固有値問題に関する数値計算アルゴリズムを定式化した。

研究成果の概要（英文）：

The analysis on the Toda equation and its related discrete integrable systems has been developed by using the theory of the orthogonal polynomials and the theory of Hirota's tau-function. In particular, we focus on the "non-autonomous discrete integrable systems". Then we are able to construct the theory of these systems from the point of view of the special functions. In addition, we formulate the numerical algorithms of some class of the generalized eigenvalue problems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,000,000	0	1,000,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,400,000	720,000	4,120,000

研究分野：離散可積分系

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：アルゴリズム、応用数学、数理工学、可積分系

1. 研究開始当初の背景

戸田格子およびその時間変数を離散化した方程式は、最も基本的かつ応用範囲の広い非線形可積分系の一つである。数学や数理物理学というまでもなく、工学・情報学など様々

な分野で戸田方程式の重要性が知られるようになってきた。可積分系は豊かな数理構造を有し、背後には大きな対称性が隠れているため、様々な分野と関係するのは自然なことであろう。また、計算機の発展による離散系への興味の高まりとともに、連続系を中心と

していた可積分系研究はその対象を離散系および超離散系と広げてきていた。

さらに、方程式の係数を定数係数から変数係数へと一般化した「非自励可積分系」も、様々な場面で必要とされていた。数学・数理論理学における直交多項式の一般化やパルベ方程式の理論や、情報学における計算機アルゴリズムの高機能化などにおいて、非自励離散可積分系の理論と密接に関係することも明らかになりつつあった。しかし、その重要性に比して非自励離散可積分系の研究は進んでおらず、部分的な結果しか得られていなかった。

また、本研究組織を中心として開発を進めてきた非自励離散ロトカ・ボルテラ方程式による特異値分解アルゴリズムは、直交多項式と可積分系の理論的な解析の結果得られたものであり、その性能も従来法にない高精度かつ高速なものであった。非自励離散可積分系のもつ様々な機能を明らかにするためにも、非自励系に対する多面的な解析が急務であった。

2. 研究の目的

本研究では、可積分系の解析手法である廣田のタウ関数と直交多項式の理論を導入することにより、非自励離散可積分系の代数的な構造を明らかにした上でその一般化と特殊化を図る。本研究では、特に以下の戸田型非自励離散可積分系に着目して研究を進めていく。

RII 型格子方程式

- ⇒ RI 型格子方程式
- ⇒ 相対論的離散戸田格子方程式
- ⇒ 非自励離散戸田格子方程式

ここで、RII 型格子および RI 型格子は、ともにローラン級数の連分数表示を考察することにより導かれた離散可積分系であり、非自励離散戸田格子の一般化とみなすことができる。とりわけ RII 型格子は 3 つの任意関数を係数にもつ非自励離散方程式であり、その特殊化としてその他の方程式を導出することが可能である。さらには、本研究で得た結果に基づく計算機アルゴリズムの構築など、工学的な応用も同時に目指す。以上の方針を具体化するために、目的を以下の 3 つに分類し設定する。

- (1) 非自励離散可積分系の解析
- (2) 非自励可積分系の理論の構築
- (3) 非自励可積分系の工学への応用

3. 研究の方法

研究目的においてあげた 3 つの各項目に対する具体的な研究方法を以下で述べる。

(1) 「非自励離散可積分系の解析」

「可積分系の時間発展は直交多項式のモーメント変形と一致する」という観点に立つことにより、廣田のタウ関数の自然な導入が可能となる。これにより非線形方程式を双線形形式に書き換えることが可能となり、十分な数の任意パラメータを含む厳密解の導出が可能となる。ここでは、直交多項式の理論と自然に適合する半無限格子上的解に関する考察を深めていく。特に離散戸田格子は、 q -直交多項式と深い関係を持つことが従来研究によって知られている。

両無限格子と半無限格子の各格子上の戸田方程式の解として、それぞれ「ソリトン解」・「分子解」と呼ばれる解が知られている。しかし、その解の構造は全く異なるものであり、その両方の解を統一的に扱うことは非常に困難な問題として知られていた。先に求めた半無限格子上の厳密解に対する考察を深めることにより、ソリトン解と分子解をその特別の場合に含む、非自励離散戸田方程式の初期値・境界値問題に対する一般解の導出をこころみる。ここでは、戸田方程式以外の非自励離散可積分系である非自励 Lotka - Volterra 方程式などに対しても、同様の一般解を与えていくことをこころみる。

(2) 「非自励可積分系の理論の構築」

従来の非自励系に対する研究は、個別の方程式に対する解析が主であり、統一的な取り扱いに成功した例はほとんど知られていない。ここでは、非自励離散戸田格子に対する双線形形式を調べることにより、その由来を調べていきたい。特に、佐藤幹夫氏による KP の理論および離散 KP 方程式との関係を明らかにする。RII 格子の可積分系としての位置づけを明確にすることにより、系統的な非自励可積分系の導出が可能となるはずである。

非対称なモーメントを持つ歪直交性を持つ多項式、双直交有理関数などに対し、廣田のタウ関数を導入することにより、行列式・パフィアンの恒等式を用いて直交多項式に対する新たな関係式を与える。特に、様々なモーメント変形に対応したヒエラルキーの導入を通し、多重直交多項式などの解析を深める。

また、RII 格子に関連した一般化ロトカ・ボルテラ方程式も最近の研究から見つかり、超離散極限の操作も可能である。この新しい超離散系に対応して箱玉系も存在することが予想され、従来までに知られた箱玉系のさらなる一般化が得られるはずである。

同時に、関係する可解格子模型との対応についても調べる。

(3) 「非自励可積分系の工学への応用」

離散戸田方程式や離散ロトカ・ボルテラ方程式は、連分数の計算に現れる q d 法や g 法と等価であることが明らかになっており、さらに、非自励系への一般化において導入された任意パラメータは、固有値計算の計算機アルゴリズムにおいて収束を加速する計算手法を与えている。このことは、非自励系への拡張が新たな計算機アルゴリズムを生み出す可能性があることを示しており、(1)および(2)に関する研究で得た非自励可積分系の成果は、工学・情報学など幅広い分野への応用が可能となる。ここでは、特に RII 格子や RI 格子を与える一般化固有値問題に対する計算アルゴリズムや連分数展開アルゴリズムの開発を中心に進めていく。

4. 研究成果

(1) 非自励離散戸田方程式と離散 KP 方程式

通常定数係数の戸田方程式であれば、双線形方程式は一つの τ 関数のみを導入することで記述することが可能である。それに対し、非自励離散戸田方程式の双線形方程式は、 τ 関数のみでは記述することができないことが知られていた。その由来について、離散 KP ヒエラルキーを用いて明らかにすることが出来た。これにより、2本の双線形方程式を同時に考えることから、戸田方程式の非自励化が可能となり、特殊関数解などを系統的に与えることが可能となった。

(2) シンメトリック RII 型直交多項式と連分数展開

シンメトリック RII 型直交多項式から導かれた離散可積分系である一般化離散ロトカ・ボルテラ方程式に対して、ミウラ変換を通じて関係する離散系との関係を明らかにした。この際、連分数展開の Pade 表との新たな意味付けが可能となった。一般化離散ロトカ・ボルテラ方程式の係数に表れる任意関数に対して適切な条件を課すことにより、超離散極限の操作を適用することが可能となり、新しい超離散系が得られた。特に、シンメトリック RII 型直交多項式に関する性質を進めることで、超離散化可能な解を導出した。

(3) 非自励離散戸田方程式から得られる離散可積分系とその特殊解について

(1)での研究結果を下に、非自励離散戸田方程式の双線形方程式から得られるいくつかの離散可積分系の導出をこころみた。その結果、ミウラ型変換で関係づけられる戸田型の非自励離散可積分系 (Lotka-Volterra 格子、

相対論的戸田格子方程式, R_I 型格子, R_{II} 型格子, FST 格子) が得られた。特に、Lotka-Volterra 格子いくつかの拡張や FST 格子に関連する可積分系などが得られた。非自励双線形方程式と離散 KP ヒエラルキーとの関係からそれら非自励離散可積分系に対する特殊解の構成を与えた。ここで与えた特殊解は、半無限格子上あるいは有限格子上の解および無限格子上の解となりうる特徴を持つ。また、 R_{II} 型格子と FST 格子に対しては、古典型楕円超幾何関数で特徴づけられる解を与えた。これは、離散 KP ヒエラルキーとの関係を明らかにすることにより可能になった結果である。

(4) 離散戸田格子方程式の楕円超幾何関数解による双直交ローラン多項式列の導出

離散戸田格子方程式のハンケル行列式解の特別な場合として、フロベニウス行列式で表されるものを与え、ここで得られた行列式解の楕円超幾何級数による表示を与えた。ここで得た特殊解から、双直交ローラン多項式列を導くことができ、対応する線形汎関数の単位円周上の積分による表示を与えることに成功した。ここで得た超幾何関数は、(1)で得た古典型とは異なるクラスであり、他の古典型双直交多項式との関連性も含め、これからのさらなる解析が必要である。

(5) 例外型直交多項式に関する研究

(1)-(4)の研究結果を基に、古典直交多項式に対するダルブー変換を施すことで三項間漸化式を満たしていないにもかかわらず、2階の常微分方程式を満たす例外型直交多項式が得られることをしめした。特に、五項間や七項間などの多項間漸化式を満たすことを示し、Laguerre 多項式から得られる場合の構成法を与えた。

(6) 歪直交多項式に付随した可積分系

歪直交性を有する歪直交多項式について、Askey-Wilson 多項式に関連するローラン歪直交多項式を具体的に構成することに成功した。特に一般の歪直交多項式については、直交多項式などに見られる漸化式は知られていないが、ここで導出したローラン歪直交多項式については具体的に漸化式および等スペクトル変形を与える公式を与えた。対応する離散可積分系を導出し、直交多項式における離散戸田格子の類似物である離散パフ格子を与えることに成功した。

(7) 非自励離散可積分系の超離散化と数値計算アルゴリズムの構築

非自励戸田分子格子の超離散化を与え、長さ制限箱玉系について議論した。特に、従来から知られている速度制限箱玉系(運搬車付

き箱玉系)との関係を明らかにした。これにより、非自励戸田分子格子を超えて RI, RII 型格子に対する超離散化への足がかりを得た。また、RII 型格子の漸化式を用いることで一般化固有問題の数値計算アルゴリズムの定式化をあたえることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

① S. Tsujimoto, Determinant solutions of the nonautonomous discrete Toda equation associated with the deautonomized discrete KP hierarchy, Journal of Systems Science and Complexity, Vol. 23, pp. 153-176, (2010), 査読あり

② S. Tsujimoto and A. Zhedanov, Elliptic hypergeometric Laurent biorthogonal polynomials with a dense point spectrum on the unit circle, SIGMA, Vol. 5, 033, 30 pages, (2009), 査読あり

③ V.P. Spiridonov, S. Tsujimoto and A. Zhedanov, Integrable discrete time chains for the Frobenius-Stickelberger-Thiele polynomials, Communications in Mathematical Physics, Vol. 272, pp. 139-165, (2007), 査読あり

[学会発表] (計 14 件)

① S. Tsujimoto, On the discrete coupled KP equation, 7-th AIMS International Conference (May, 2008, USA)

② S. Tsujimoto and Y. Matsui, On Hankel determinants of the nonautonomous discrete Toda and Lotka-Volterra equations, SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherence Structures (September, 2006, USA)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ

<http://www-is.amp.i.kyoto-u.ac.jp/tujimoto/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

辻本 諭 (TSUJIMOTO SATOSHI)

京都大学・大学院情報学研究科・准教授
研究者番号：60287977

(2) 研究分担者

中村佳正 (NAKAMURA YOSHIMASA)

京都大学・大学院情報学研究科・教授
研究者番号：50172458